Etude No. 29
Projet N° 8351-146
IGM82-146-029

METHODE DE CONCEPTION AVANCEE POUR ARTICLES EN PLASTIQUE RENFORCE

Rapport final

Par

Sylvain Goudreau

et

Raymond Gauvin

Institut de génie des matériaux

Septembre 82

CNRC 20616

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

1. DESCRIPTION DU CARTER ET DU TYPE DE SOLLICITATION Page 1

2. ESSAI DU CARTER Page 5

3.1 Calcul de la fréquence naturelle des 2 faces du carter 1 par une méthode analytique Page 8

3.1.1 Modélisation du carter Page 8

3.1.2 Calcul de la rigidité équivalente du laminé typique Page 11

3.1.3 Calcul des déflexions statiques et de la fréquence naturelle Page 15

3.2 Calcul des fréquences propres du carter no 1 (face A) par la méthode des éléments finis Page 16

3.2.1 Développement de l'élément fini Page 16

3.2.2 Modélisation de la face A du carter no 1 Page 21

3.2.3 Fréquences propres et déformées des premiers modes de vibration Page 21

4. AMORTISSEMENT Page 23

5. CALCUL DES DEFORMATIONS Page 30

5.1 Calcul des déformations sous vibration Page 30

5.2 Calcul des déformations en utilisant la méthode analytique Page 32

5.2.1 Déformations de la poutre A Page 32

5.2.2 Déformations de la poutre B Page 35

5.3 Calcul des déformations de la face A du carter en utilisant la méthode des éléments finis Page 38

6. DISCUSSION Page 38

7. CONCLUSION Page 40

ANNEXE A A.1

ANNEXE B B.1

B.1 Modélisation du carter: inerties et positions correspondantes de l'axe neutre des poutres A et B. B.1

B.2 Calcul de la rigidité équivalente du laminé typique du carter no 2. B.1

B.3 Calcul des déflexions statiques et de la première fréquence naturelle du carter no 2. B.4

B.4 Calcul des déformations de la poutre (A et B) du carter no 2. B.5

REFERENCE

NOMENCLATURE

ABSTRACT

Hand lay-up contact molding is commonly used in the fiberglass reinforced plastics industry. Even if the process is relatively simple, it is often used to manufacture parts which will eventually be heavily loaded. For this reason, it is important to evaluate the part performances at the design stage. In many cases, the question is how sophisticated should the analysis be, taking into account the inherent variations from one piece to another and the discrepency between the finished part properties and the tabulated properties for hand lay-up laminates. In trying to answer that question, a gear case subjected to vibration is used as an example in this article. The results of two analytical techniques, one simple and one using finite elements, are compared with experimental results. The investigation looks at the natural frequency and the deformations.

INTRODUCTION

Le procédé de moulage contact, où la main-d'oeuvre joue un rôle prépondérant est un des procédés les plus répandus dans l'industrie canadienne du plastique renforcé de fibres de verre. Les produits, manufacturés de cette façon, présentent souvent un manque d'uniformité de construction, et par voie de conséquence, une variation des propriétés. Ainsi, le rapport fibre de verre-résine, l'épaisseur du laminé, l'orientation des fibres sont des paramètres difficilement contrôlables avec précision dans ce procédé. Malgré cette variation des propriétés, ce procédé est utilisé fréquemment pour fabriquer des pièces sollicitées sévèrement et, de ce fait, les performances de celles-ci doivent être prédites le plus exactement et le plus efficacement possible.

Dans le présent travail, nous faisons l'analyse d'un cas type soit celui d'une moitié de carter de locomotive soumise à des vibrations. Cette analyse porte sur le calcul des fréquences naturelles et des déformations produites lors du phénomène de résonnance. Cette analyse est faite par deux méthodes, la première utilisant des modèles simples et la seconde faisant appel aux éléments finis. Cette dernière nous permet de définir facilement la géométrie complexe du carter. Les résultats sont, par la suite, comparés à ceux obtenus en laboratoire.

Cette approche nous permet de dire que la méthode des éléments finis nous donne une information beaucoup plus complète du comportement du carter comparativement au modèle simple. Cependant, les deux méthodes nous donnent une précision semblable dans les différents calculs.

1. DESCRIPTION DU CARTER ET DU TYPE DE SOLLICITATION

Le carter est constitué de deux parties symétriques qui, assemblées, créent un milieu fermé pour une paire d'engrenages (figure 1). Les deux côtés du carter sont identifiés dans ce texte comme la face A où deux trous sont pratiqués pour le passage de

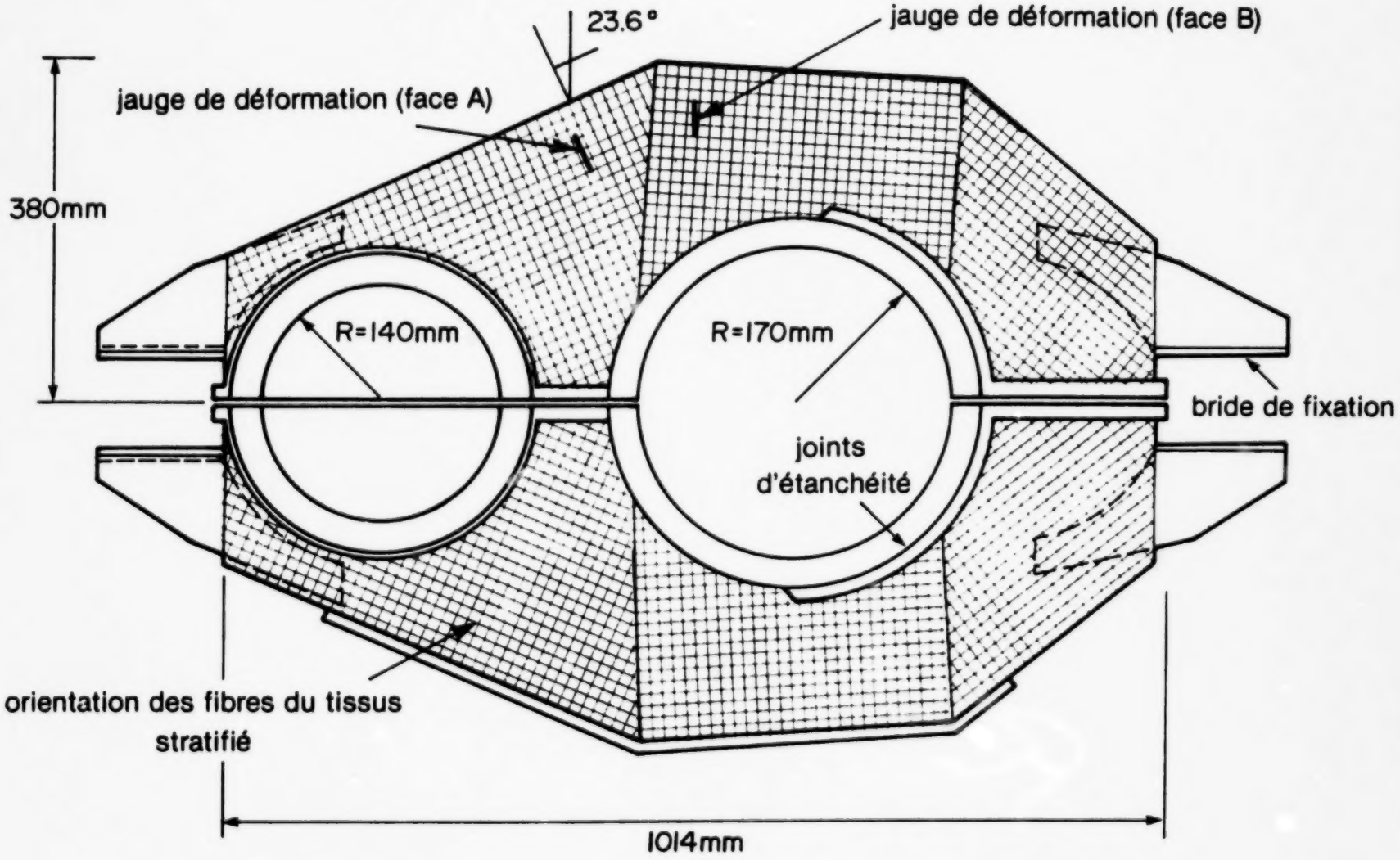


Schéma du carter

FIG. 1

l'arbre de transmission et de l'essieu (le plus grand trou) et la face B où il n'existe qu'un seul trou pour le passage de l'essieu. Le carter recouvre la paire d'engrenages qui entraînent les roues motrices d'une locomotive (figure 2).

Les plans de production montrant le carter sous différentes vues et donnant ses dimensions, sont présentés en annexe A.

Deux carters, de structure différente, font l'objet de cette analyse. Les deux carters sont composés d'une matrice de résine polyester isophtalique.

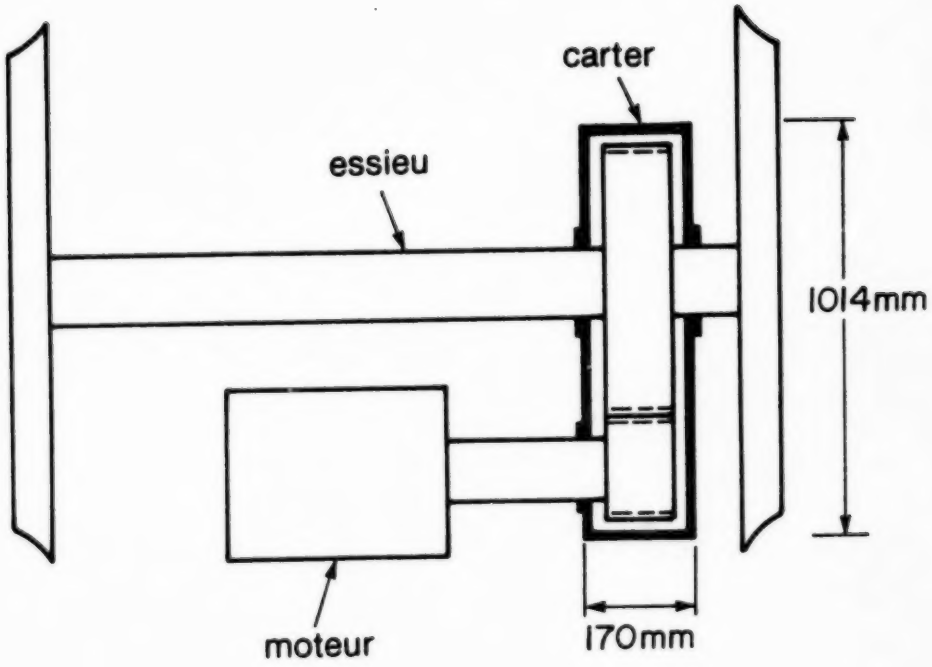
La structure du carter 1 est faite d'un laminé de 4 couches de tissu mat (450 gr/m^2) et de tissu "stichmat 312-300" (considéré comme un tissu mat de 450 gr/m^2 et un tissu stratifil de 540 gr/m^2). Le pourcentage de fibre de verre du tissu mat est de 18 à 22% tandis que celui du tissu stratifil est de 45 à 50%. La séquence de laminage, faite sur un moule mâle est:

1 couche de tissu mat
2 couches de tissu "stichmat 312-300"
1 couche de tissu mat

Le carter No 2 est fait d'un laminé de trois couches de tissu mat (450 gr/m^2) et 2 couches de tissu stratifil (540 gr/m^2) qui sont posées alternativement sur le moule mâle. Le pourcentage en fibre de verre du tissu mat et du tissu stratifil est respectivement de 25 à 28% et de 35 à 40%.

Pour répondre à des impératifs de production et pour faciliter la pose des tissus en continu d'une face à l'autre du carter, l'orientation de la chaîne du tissu stratifil a été choisie perpendiculaire aux bords du carter telle qu'illustrée à la figure 1.

Le type de sollicitation étudié sera celui d'une vibration des faces A et B qui se fait perpendiculairement à leur plan. Ce mode de



Emplacement du carter

FIG. 2

vibration est le plus facilement excitable dû à la faible rigidité en flexion des faces A et B. L'épaisseur moyenne mesurée du laminé typique est de 5.84 mm.

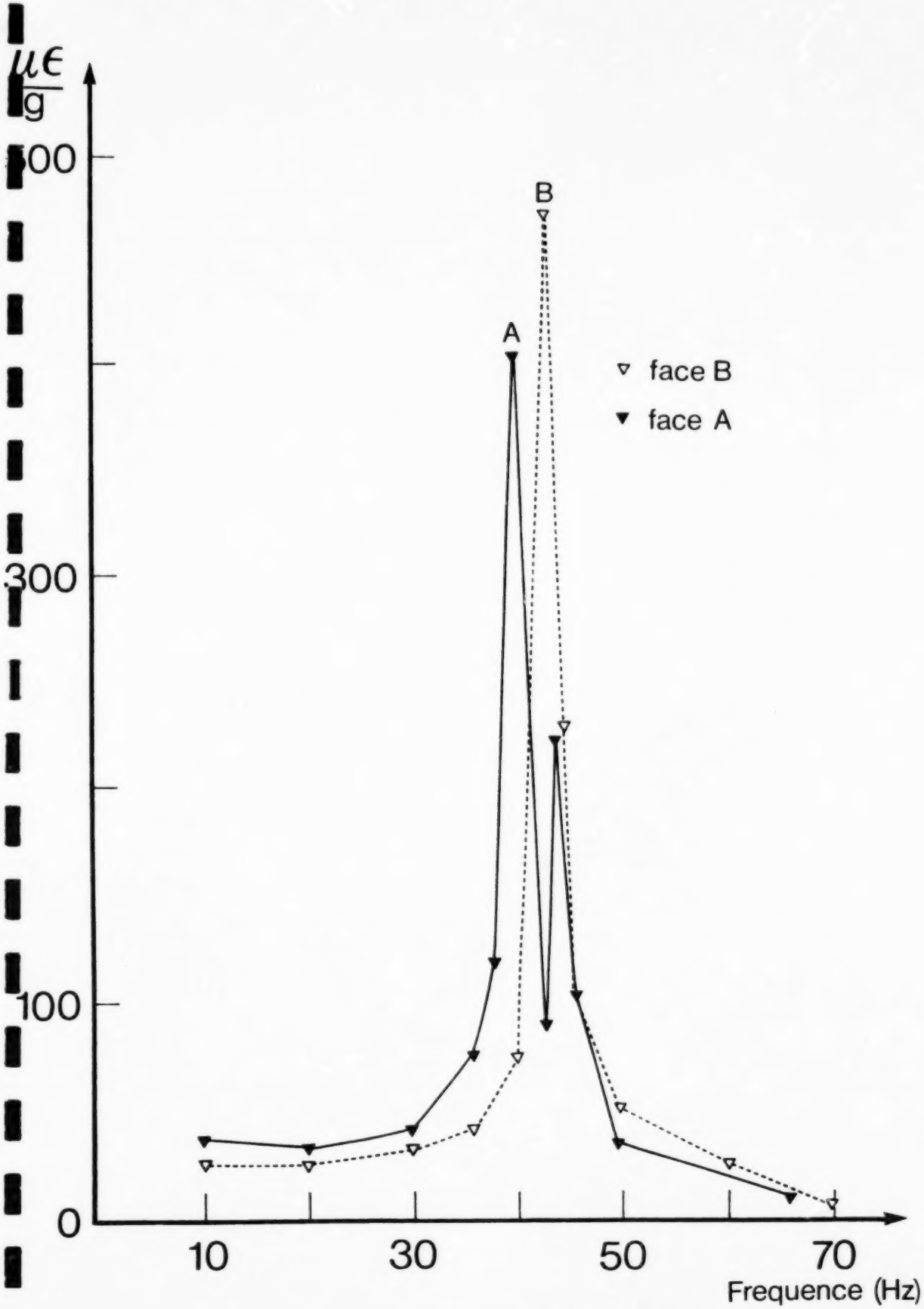
2. ESSAI DU CARTER

La première fréquence a été mesurée en excitant celui-ci dans l'axe perpendiculaire au plan de ses faces (A et B). Un montage conçu à l'Université Concordia qui fixe le demi-carter par ses extrémités à un vérin d'excitation a été conçu de façon à placer le centre de gravité du demi-carter dans l'axe d'excitation du vérin (les plans de fabrication du carter et du montage sont présentés en annexe A).

Une jauge de déformation a été placée sur chaque face dans la zone de déformation maximale (position des jauges: face A, x = .465 m, y = .109 m; face B, x = .351 m, y = .071 m; figure 12). Sur la face A du carter 2, une autre jauge de déformation a été placée transversalement à l'axe de la première jauge de déformation.

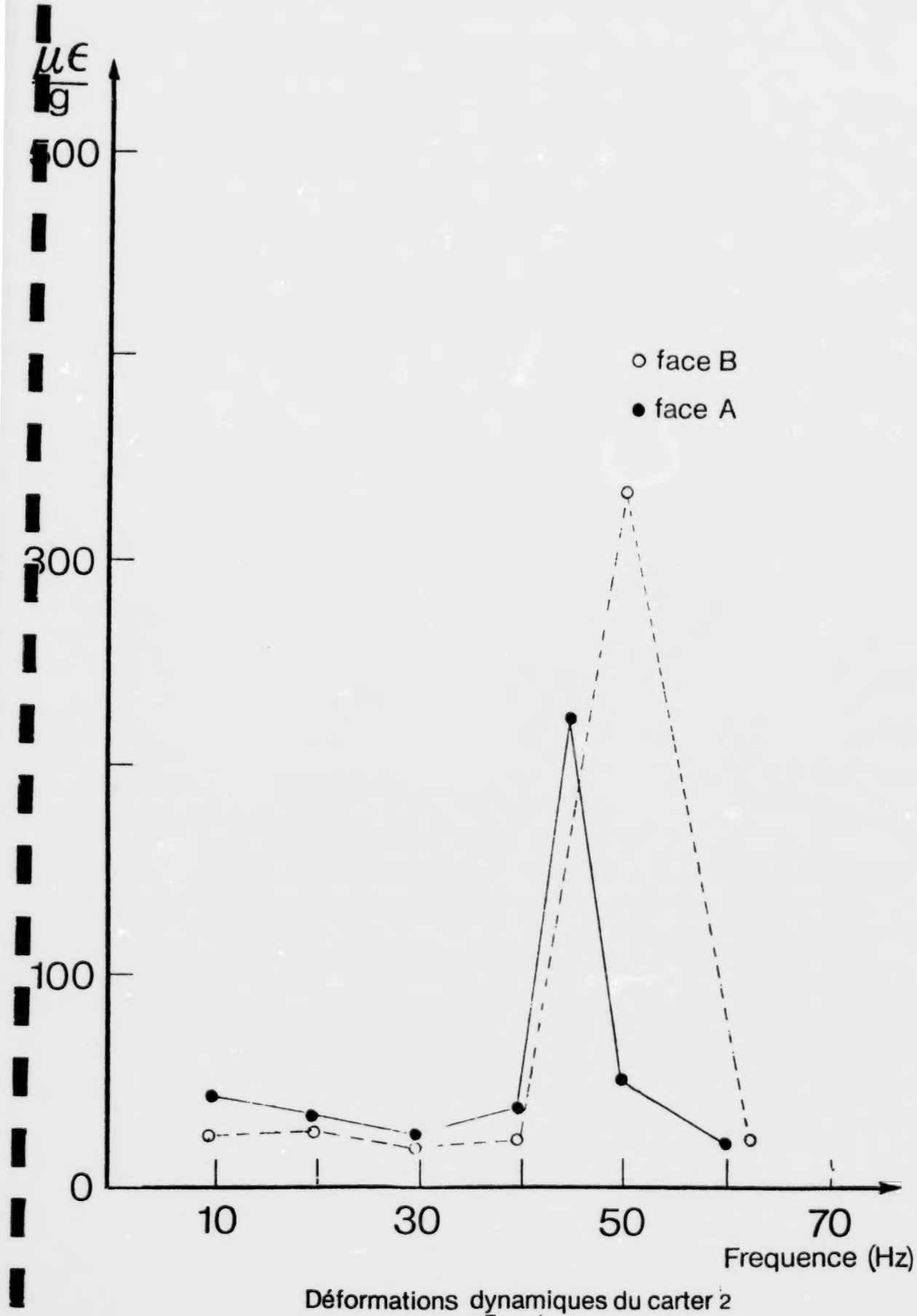
La procédure employée lors des essais des carters est présentée à la référence [1, chapitre 6].

Le système fut soumis à des fréquences d'excitation variant de 0 à 70 Hz. La réponse des jauges de déformation à cette excitation est reproduite aux figures 3 et 4. Sur ces figures, la déformation est normalisée et exprimée en $\mu\varepsilon/g$ où g est l'accélération due à la gravité. Comme on peut le voir sur les figures 3 et 4, les fréquences de résonnance de la face A et de la face B du carter 1 sont respectivement 40.5 Hz et 43.5 Hz tandis que pour le carter 2 celles-ci sont 45 Hz et 50 Hz. Les déformations maximales normalisées ($\mu\varepsilon\alpha/g$) furent mesurées à 400 pour la face A et 475 pour la face B du carter 1 tandis que pour le carter2elles furent respectivement de 225 et de 330. La jauge transversale, placée sur la face A du carter, donne une déformation égalant de .55 à .7 $\mu\varepsilon\alpha$.



Déformations dynamiques du carter 1

FIG. 3



Déformations dynamiques du carter 2

FIG. 4

Sous une accélération de 1g des brides de fixation à la fréquence de résonnance du carter, la flèche maximale observée fut de l'ordre de 6.4 mm (1/4 po).

3.1 Calcul de la fréquence naturelle des deux faces du carter 1 par une méthode analytique

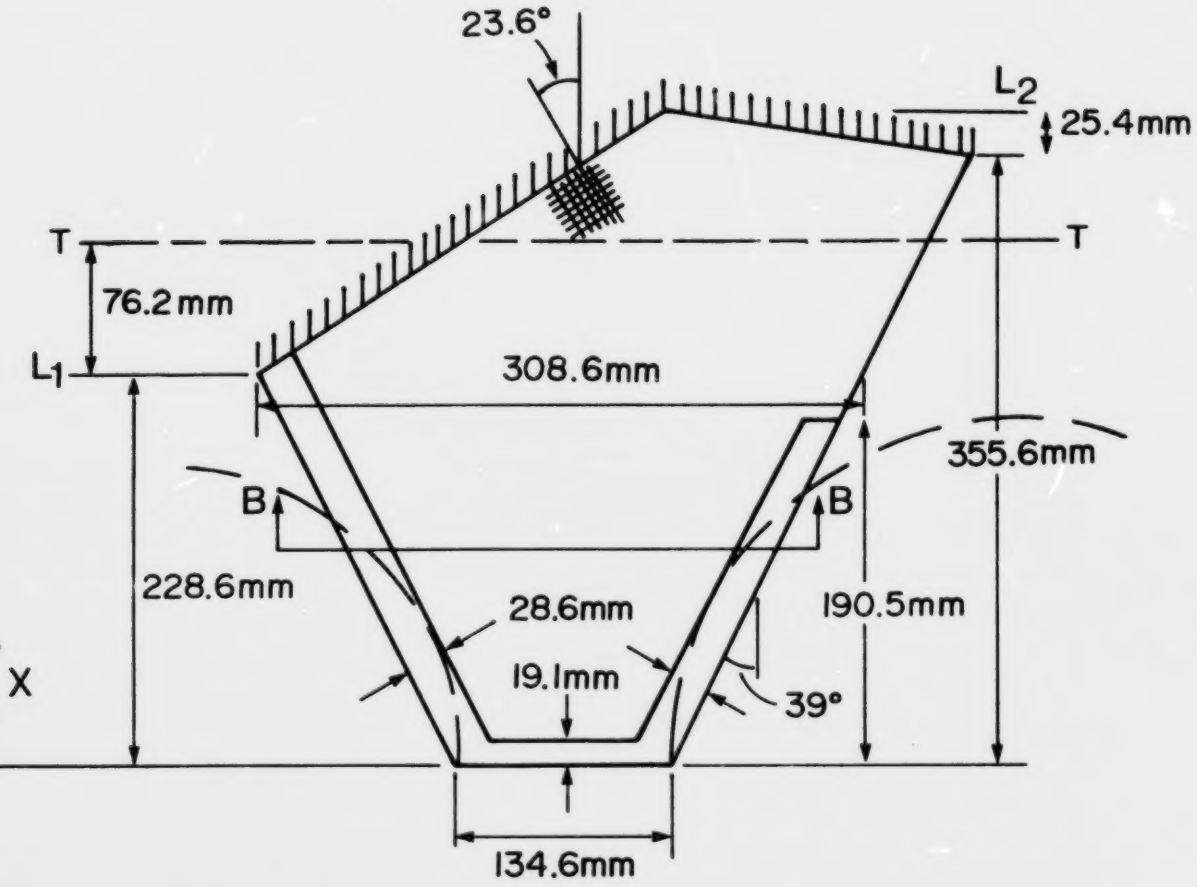
3.1.1 Modélisation du carter

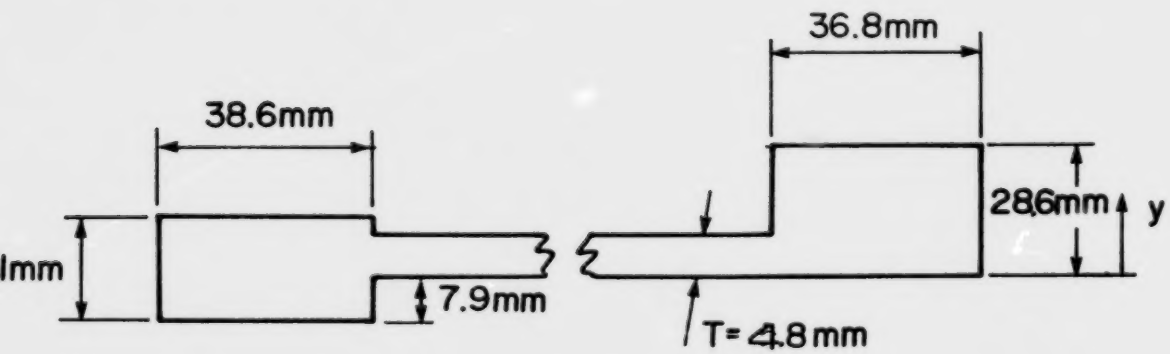
L'étude se fait sur une moitié seulement de carter qui est symétrique. Les deux faces de ce demi-carter sont des plaques anisotropiques dont l'épaisseur varie en bordure dû à la présence des joints d'étanchéité. L'examen du carter nous révèle que la partie la plus susceptible de vibrer dans le premier mode est celle située entre les trous aménagés pour les deux axes pour la face A du carter et celle dont la surface en porte-à-faux est la plus grande pour la face B.

Pour tenir compte plus facilement de la présence des joints d'étanchéité dans le calcul de la rigidité, de la forme irrégulière et de l'orthotropie du laminé, nous utilisons un modèle de poutre longue. Ces deux modèles, pour les faces A et B, sont respectivement montrés aux figures 5 et 6.

Pour tenir compte des encastrements qui sont en réalité sur des axes différents, un encastrement unique est défini à mi-chemin entre les points extrêmes L_1 et L_2 des encastrements réels. Cet axe d'encastrement théorique, qui servira dans l'analyse, est identifié par l'axe T-T aux figures 5 et 6. L'inertie entre le point d'encastrement L_1 et l'encastrement théorique sera considérée constante et égale à celle calculée au niveau d'encastrement L_1.

Les joints d'étanchéité sont approximés par une superposition de laminés typiques (d'épaisseur t) de largeur égale à la largeur maximale des joints dans lesquels nous négligeons les rainures (figures 5 et 6). Selon les plans de fabrication, le laminé typique est d'une épaisseur de 4.8 mm (3/16 po).

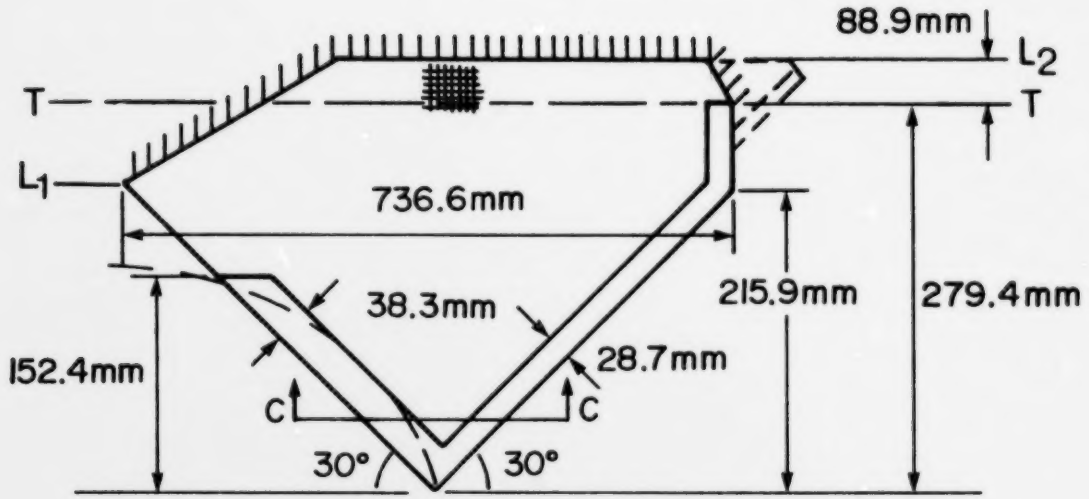


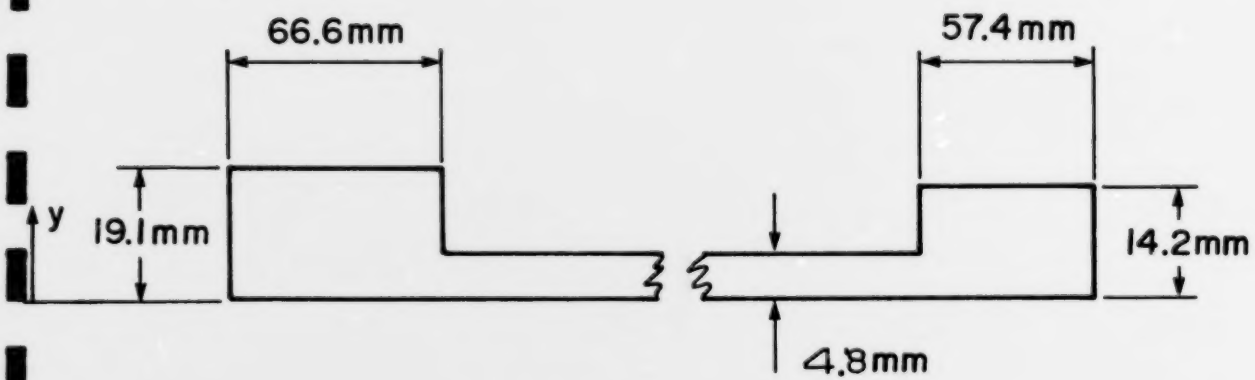


SECTION B-B

Modélisation en poutre de la face A

FIG. 5





SECTION C - C

Modélisation en poutre de la face B

FIG. 6

Ainsi les joints d'étanchéité pour la poutre A sont une superposition de 6 laminés typiques et 4 laminés typiques tandis que pour la poutre B ceux-ci sont de 4 laminés typiques et de 3 laminés typiques.

La poutre A est séparée en 12 masses et 12 inerties tandis que la poutre B est séparée en 11 masses et 11 inerties. Un exemple de calcul de l'inertie équivalente de la poutre est présenté ci-dessous [2, 3]. Ainsi, la rigidité de la poutre A, à x = 228.6 (figure 5) où la largeur totale est 507.6 mm se calcule de la façon suivante:

Calcul de l'axe neutre

$$\bar{y} = \frac{[(4t \times 36.8\ \text{mm} \times t/3) + (t \times 470.8\ \text{mm} \times .5t)]}{[(36.8\ \text{mm} \times 4t) + (470.8\ \text{mm} \times t)]} \qquad (1)$$

$$= .46t$$

Calcul de l'inertie en flexion

$$EItot = [618.5\ \text{mm}\ EI] + t^2EA\left[[(.5 - .46)^2 \times 471.2] + [(1.83 - .46)^2 + (.83 - .46)^2 + (-.17 - .46)^2 + (-1.17 - .46)^2] \times 36.8\right]$$

$$= 618.5\ EI + 187.5t^2EA \qquad t = 4.8\text{mm} \qquad (2)$$

EI et EA sont les rigidités équivalentes du laminé typique.

Les autres inerties, les positions corespondantes de l'axe neutre des poutres A, B sont énumérées à l'annexe B.1.

3.1.2 Calcul de la rigidité équivalente du laminé typique

La littérature commerciale du fournisseur de matière première (Fiberglas Canada Ltd) donne les informations suivantes:

tissu mat

% en poids de fibre de verre = 20%

$E_m = 6$ GPA

$\nu_m = .28$

$$G_m = \frac{E_m}{2(1 + \nu_m)} = 2.34 \text{ GPA}$$

tissu stratifil % en poids de fibre de verre = 45%
$V_f = .54$
$E_L = E_T = 11$ GPA (Trame et chaîne de tissu)
$\nu_{LT} = .26$

Pour obtenir G_{LT}, nous utilisons l'équation Halpin-Tsai [4]:

$$\frac{G_{LT}}{G_r} = \frac{1 + n\,V_f}{1 - n\,V_f} \tag{3}$$

$$n = \frac{G_f/G_r - 1}{G_f/G_r + 1} \tag{4}$$

$$G_f = \frac{E_f}{2(1 + \nu_f)} = 30 \text{ GPA} \tag{5}$$

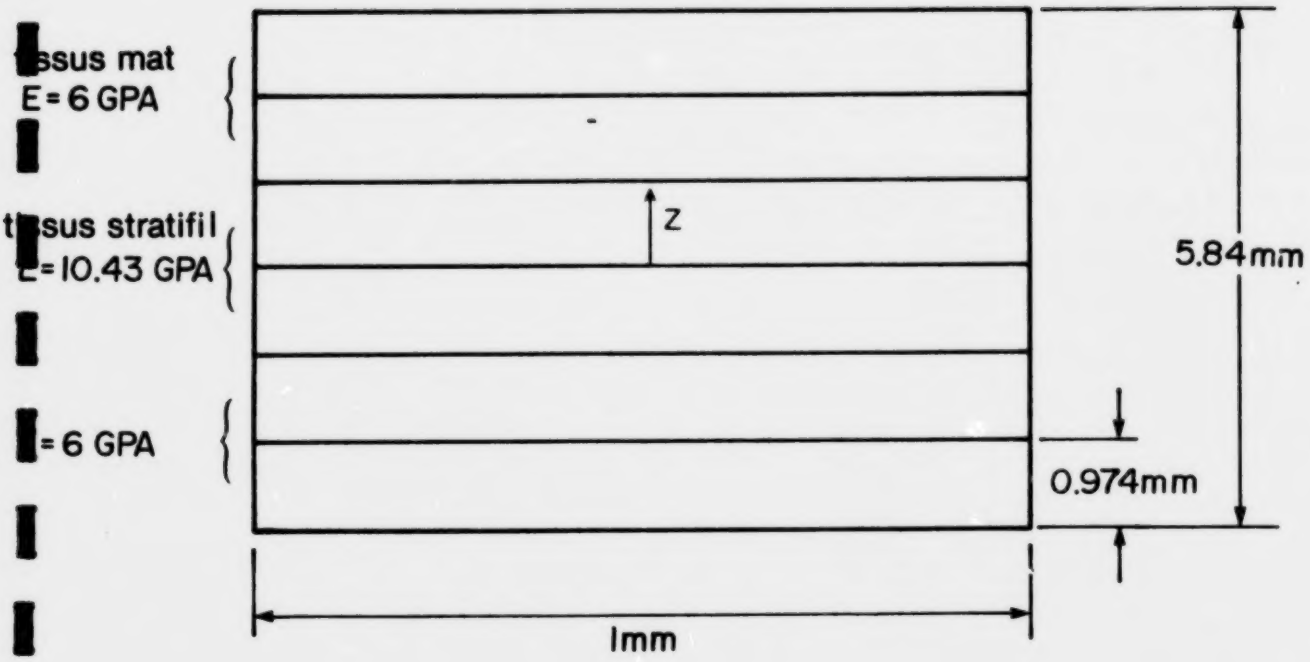
$$G_r = \frac{E_r}{2(1 + \nu_r)} = 1.30 \text{ GPA} \tag{6}$$

Ce qui donne $G_{LT} = 3.76$ GPA. Pour la poutre A, où il existe un angle $\alpha = 23.6°$ entre la trame du tissu stratifil et l'axe de la poutre, le module de Young du tissu stratifil selon cet angle α ($E\alpha$), se calcule selon l'équation de transformation des constantes élastiques d'un matériau orthotropique [5]:

$$\frac{E_L}{E_\alpha} = \cos^4\alpha + \frac{E_L \sin^4\alpha}{E_T} + \frac{1}{4}\left[\frac{E_L}{G_{LT}} - 2\,\nu_{LT} \sin^2 2\alpha\right] \tag{7}$$

Dans le cas présent, $E_\alpha = 10.43$ GPA.

Le calcul des rigidités équivalentes EI et EA du laminé typique est fait sans tenir compte de l'effet des différents coefficients de Poisson de chaque couche du laminé [5, 6]. Ainsi pour la poutre A, en utilisant des épaisseurs égales pour les couches de mat et de stratifil ($t/6 = {}^{5.84}/_{6}$ mm), les rigidités équivalentes du laminé (figure 7) pour la flexion par millimètre de largeur sont:



Structure du laminé typique du carter1

FIG. 7

$$EI = E\,[I + Ad^2] \qquad (8)$$

$$EI = \left\{ \left[\frac{4}{12} \times \frac{6\ GPa}{10.43\ GPa} \times .97\ mm^3 \right] + \left[\frac{2}{12} \times .97\ mm^3 \right] + \left[2 \times \frac{6\ GPa}{10.43} (2.5^2 + 1.5^2) .97\ mm^3 \right] + \left[2 \times .97\ mm^3 \times .5^2 \right] \right\} 10.43\ GPA$$

$$= 10.43\ GPa \times 9.83\ mm^4 / mm\ largeur$$

pour la traction:

$$EA = 10.43\ GPa \left[\frac{(4 \times 6\ GPa \times .97\ mm) + (2 \times .97\ mm)}{10.43\ GPa} \right]$$

$$= 10.43\ GPa \times 4.19\ mm^2/mm\ largeur \qquad (9)$$

De même façon, pour la poutre B où $\alpha = 0$ ($E\alpha = EL$), on obtient en flexion: $EI = 11\ GPa \times 9.03\ mm/mm\ largeur$ (10)

$EA = 11\ GPa \times 4.03\ mm^2/mm\ largeur$ (11)

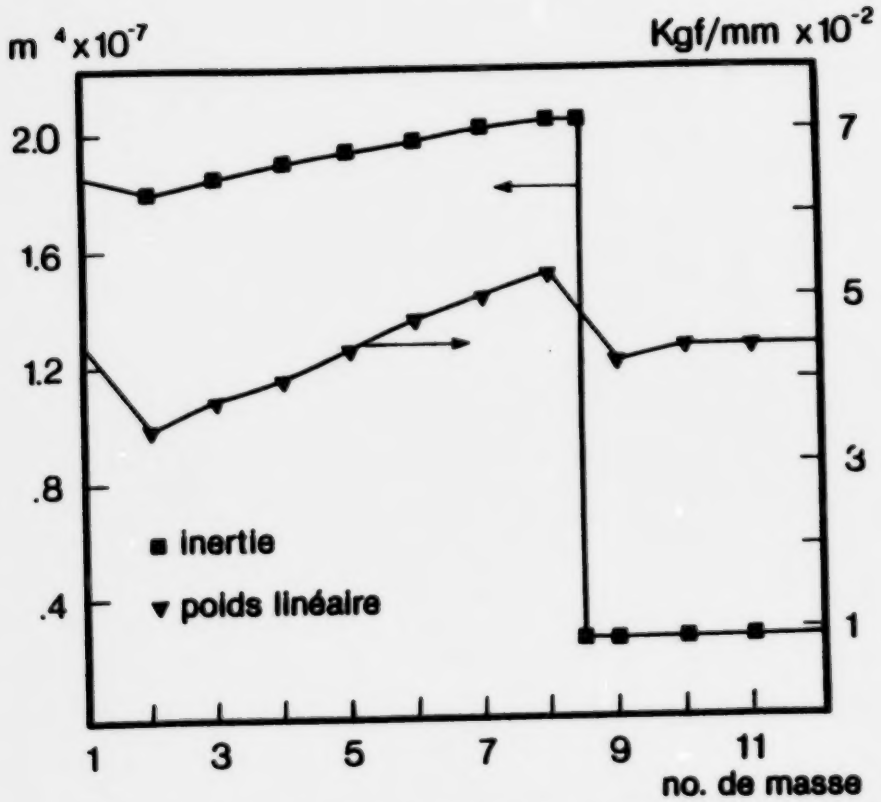
Le poids surfacique du laminé est calculé à 8.9 Kg/m^2. Les valeurs numériques des masses et des rigidités pour les poutres A et B, sont énumérées au tableau 1 et reportées aux figures 8 et 9. A titre d'exemple, pour la poutre A (X = 228.6 mm) la rigidité s'obtient ainsi:

$$EItot = 618.5EI + 187.5\ t^2\ EA$$

$$= 10.43\ GPa\ [(618.5 \times 9.83) + (187.5 \times 4.8^2 \times 4.19)]$$

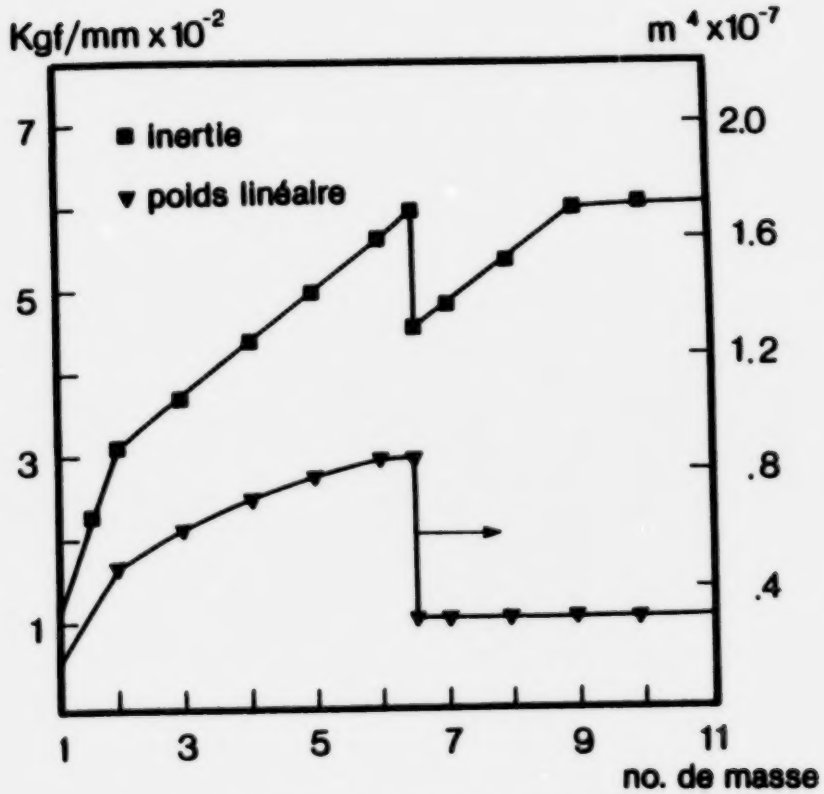
$$= 10.43\ GPa \times 24300\ mm^4 = 10.43\ GPa \times .243\ m^4 \times 10^{-7}$$

L'utilisation de l'épaisseur mesurée (t = 5.8mm) dans le calcul de la rigidité équivalente du laminé typique plutôt que l'épaisseur montrée sur les plans de fabrication (t = 4.8mm) permet de nous donner un laminé typique plus fidèle à la réalité pour l'analyse par éléments finis (chap. 3.2) en plus de nous donner les mêmes propriétés du laminé typique pour les deux types d'analyse. Celà affecte peu le calcul de l'inertie pour le modèle simplifié car celle-ci est principalement fonction de l'épaisseur au cube des joints d'étanchéité.



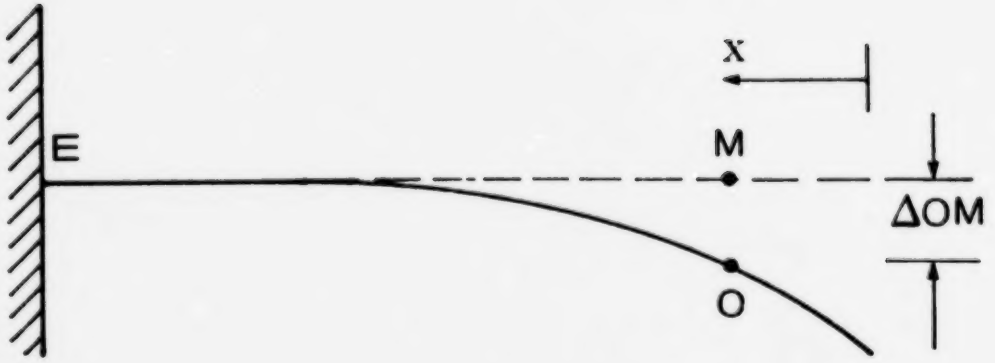
Inertie et poids linéaire de la face A modélisée en poutre

FIG. 8



Inertie et poids linéaire de la face B modélisée en poutre

FIG. 9



Flèche tangentielle d'une poutre en porte-à-faux

FIG. 10

Tableau 1

masse	x(mm)	Poutre A w(kgf)	Poutre A $I(m^4)x10^{-7}$	Poutre B w(kgf)	Poutre B $I(m^4)x10^{-7}$
1	12.7	.117	1.72	.0286	.150
2	38.1	.091	1.62	.081	.449
3	63.5	.099	0.97	.978	.562
4	88.9	.104	1.034	.114	.657
5	114.3	.114	1.740	.130	.716
6	139.7	.122	1.768	.146	.769
7	165.1	.130	1.796	.126	.270
8	190.5	.138	1.825	.141	.283
9	215.9	.110	.240	.157	.295
10	241.3	.114	.243	.157	.295
11	266.7	.114	.243	.157	.295
12	292.1	.114	.243	----	----

3.1.3 Calcul des déflexions statiques et de la fréquence naturelle

La flèche statique de la poutre est obtenue en utilisant le théorème de la flèche tangentielle. C'est une méthode bien adaptée lorsque la courbe M/EI en fonction de x présente des discontinuités. La flèche tangentielle ΔOM (figure 10), mesurée verticalement entre le point O sur la poutre et la tangente M, est égale au premier moment de la surface M/EI par rapport au point O. Dans le cas d'une poutre encastrée libre, la déflexion au point O est égale à la flèche tangentielle (O-M) et se calcule par l'équation suivante [7]:

$$\text{vi au point O} = \Delta OM = \overline{x} \int \frac{M}{EI}\, dx \qquad (12)$$

où $\overline{x}$ représente la distance entre le point O et le centroide de l'intégrale: $\int M/EI\, dx$. Les déplacements (vi) ainsi calculés sont donnés au Tableau 2.

Pour calculer la fréquence naturelle des poutres, nous utilisons le principe de Raleigh [8].

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g \sum_{i=1}^{n} W_i v_i}{\sum_{i=1}^{n} W_i v_i^2}} \qquad (13)$$

En utilisant les valeurs des tableaux 1 et 2 dans l'équation 13, pour la poutre A (face A), la fréquence naturelle est égale à 50 Hz et pour la poutre B, celle-ci est égale à 76 Hz. La fréquence naturelle, ainsi évaluée, ne tient compte que de l'énergie de déformation en flexion et fait abstraction de l'énergie de déformation par cisaillement (dû à l'effort tranchant). De plus, seule l'énergie cynétique de translation est considérée (on néglige l'énergie cynétique de rotation).

Tableau 2

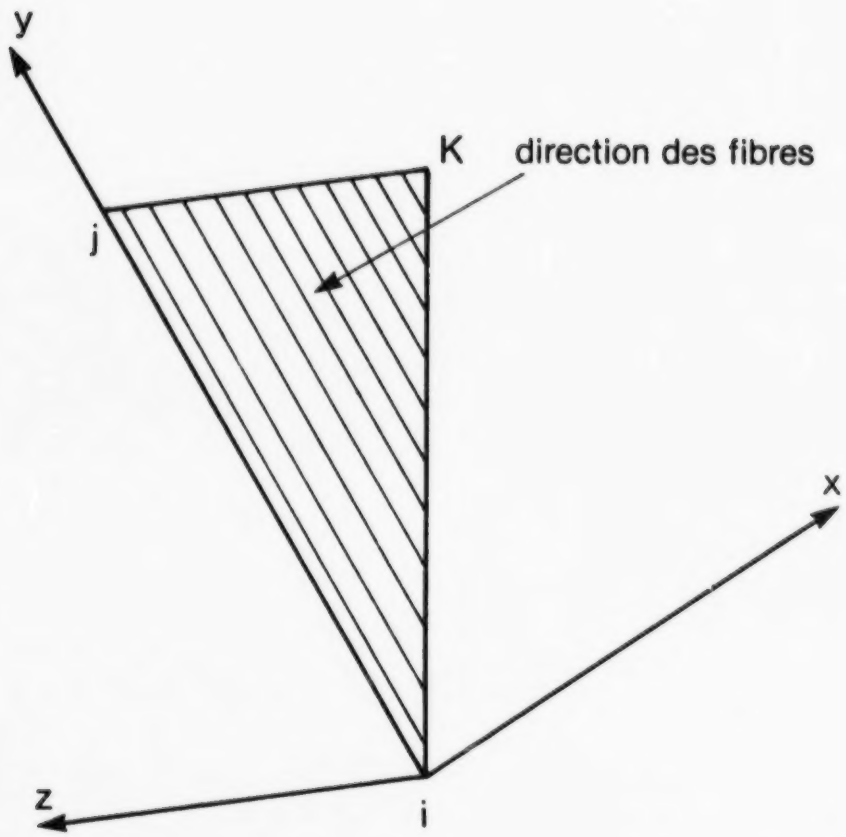
masse	déplacement (mm) x 10^{-2} Poutre A	Poutre B
1	20.8	8.7
2	18.6	7.7
3	16.5	6.6
4	14.3	5.6
5	12.1	4.5
6	10.0	3.5
7	7.8	2.5
8	5.7	1.7
9	3.7	0.9
10	2.2	0.4
11	0.8	.04
12	0.1	---

Le calcul de la rigidité équivalente du laminé typique du carter 2 et le calcul de la fréquence naturelle de celui-ci sont présentés en annexe B.2 et B.3. Pour la face A du carter 2, la fréquence naturelle est de 41 Hz et pour la face B, celle-ci est de 64 Hz.

3.2 Calcul des fréquences propres du carter 1 (face A) par la méthode des éléments finis.

3.2.1 Développement de l'élément fini

Pour cette analyse, les coordonnées (x et y) des axes de référence locale des éléments sont choisies respectivement parallèles aux directions de la trame et de la chaîne du tissu stratifié (figure 11). La construction du laminé étant symétrique par rapport au plan xy et puisque nous étudions la flexion dans la direction perpendiculaire au plan xy, la relation moment-courbure peut se résumer ainsi [1, 5]:



Système local de coordonnées des éléments

FIG. 11

$$\begin{bmatrix} Mx \\ My \\ Mxy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Kx \\ Ky \\ Kxy \end{bmatrix} \qquad (14)$$

où $$D_{11} = 2/3\left[\frac{Em}{(1-\nu^2 m)}\left[(t_{LT} + 2tm)^3 - t_{LT}{}^3\right] + \frac{E_{LT}}{(1-\nu^2 LT)} t_{LT}{}^3\right]$$

$$D_{12} = D_{21} = 2/3\left[\frac{\nu m\ Em}{1-\nu^2 m}\left[(t_{LT} + 2tm)^3 - t^3{}_{LT}\right] + \frac{\nu_{LT}\ E_{LT}}{1-\nu^2{}_{LT}} t_{LT}{}^3\right]$$

$$D_{22} = D_{11}$$

$$D_{66} = 2/3\left[\frac{Em}{2(1+\nu m)}\left[(t_{LT} + 2tm)^3 - t_{LT}{}^3\right] + G_{LT}\ \ t^3{}_{LT}\right]$$

$$Kx, Ky, Kxy = -W,xx, -W,yy, -2W,xy \qquad (15)$$

où W est la fonction déplacement de la plaque en flexion.

Ces équations, contrairement au modèle simplifié, considèrent l'effet de la variation du coefficient de poisson entre les diverses couches du laminé.

Pour prédire les fréquences naturelles du carter et les divers modes de déformation, nous utilisons les éléments triangulaires [(xi yi), (xj, yj), (xk, yk)] plans en flexion à 3 degrés de libertés par noeud et la fonction de déplacement W, perpendiculaire au plan xy, est égale à:

$$W = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9y^3 \qquad (16)$$

Nous pouvons évaluer la fonction des déplacements, les déplacements aux noeuds d'un élément et leurs dérivés par les expressions suivantes:

$$\{W\} = [C]\ \{a\}$$
$$\{q\} = [A]\ \{a\} \qquad (17)$$

où $\{q\}^t = \{ Wi, Wi,x, Wi,y, Wj, Wj,x, Wj,y, Wk, Wk,x, Wk,y \}$

$\{a\}^t = \{ a_1, a_2, ..., a_9 \}$

$[C] = \{ 1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, y^3 \}$

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & xi & yi & xi^2 & xiyi & yi^2 & xi^3 & xi^2yi & yi^3 \\ 0 & 1 & 0 & 2xi & yi & 0 & 3xi^2 & 2xiyi & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & xi & 2yi & 0 & xi^2 & 3yi^2 \\ & & & & \text{et ainsi de suite, pour les noeuds J et K.} & & & & \end{bmatrix}$$

et ainsi, la fonction déplacement et les fonctions déformations s'expriment par:

$$\{W\} = [C]\,[A^{-1}]\,\{q\} \tag{18}$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon x \\ \varepsilon y \\ \gamma xy \end{Bmatrix} = Z\,[G]\,[A^{-1}]\,\{q\} \tag{19}$$

où la matrice [G] est obtenue en faisant la différenciation de [C] selon les équations suivantes:

$$\varepsilon x = -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon x = -\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \tag{20}$$

$$\gamma xy = -2\,\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}$$

On peut exprimer le vecteur {M} en fonction des déformations:

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} Mx \\ My \\ Mxy \end{Bmatrix} = [D]\,\{\varepsilon\}\,. \tag{21}$$

Lorsque nous donnons des déplacements virtuels $\delta\{q\}$ aux noeuds de l'élément, l'énergie de déformation en flexion et en torsion induite égale:

$$\delta U = 1/2 \int_V \delta\{\varepsilon\}^t\{\sigma\}\,dv = 1/2 \int_A \delta\{q\}^t[B]^t[D][B]\,\delta\{q\}dA$$
$$\text{où } [B] = [G][A^{-1}] \tag{22}$$

$$\delta U = 1/2\,\delta\{q\}^t \int_A [B]^t\,[D]\,[B]\,dA\,\delta\{q\} \tag{23}$$

L'énergie cynétique de translation correspondant à ces déplacements virtuels est égale à:

$$\delta T = 1/2 \int_A h \rho(\delta \dot{W})^2 \, dA \qquad (24)$$

L'énergie cynétique, pour un mouvement sinusoidal, devient:

$$\delta T = 1/2 \int_A h \rho\omega^2(\delta W)^2 \, dA \qquad (25)$$

où ω est la vitesse angulaire et W est l'amplitude de vibration et en utilisant l'équation 18, on obtient:

$$\delta T = 1/2 \, \omega^2 \, \delta\{q\}^t \int h\rho [A]^{-1t} \, [C]^t \, [C] \, [A]^{-1} \, dA \, \delta\{q\} \qquad (26)$$

Ainsi, pour chaque élément:

$$\delta Ue = 1/2 \, \delta\{q\}^t \, [Ke] \, \delta\{q\} \text{ où } [Ke] = \int_A [B]^t \, [D] \, [B] \, dA \qquad (27)$$

$$\delta Te = 1/2 \, \omega^2 \, \delta\{q\}^t \, [Me] \, \delta\{q\} \text{ où } [Me] = \int h\rho \, [A]^{-1t} \, [C]^t \, [C] \, [A]^1 \, dA \qquad (28)$$

En considérant tous les éléments de la structure, les énergies potentielles et cynétiques deviennent:

$$\delta U = \Sigma \delta Ue = 1/2 \, \delta\{q\}^t \, [K] \, \delta\{q\} \qquad (29)$$

$$\delta T = \Sigma \delta Te = 1/2 \, \omega^2 \, \delta\{q\}^t \, [M] \, \delta\{q\} \qquad (30)$$

En utilisant le principe du travail virtuel et le fait que le travail virtuel total est égal à 0, on obtient:

$$\delta(U-T) = ([K] - \omega^2 \, [M]) \, \delta\{q\} = 0 \qquad (31)$$

Cette équation aux valeurs propres est solutionnée pour calculer les fréquences naturelles et les déformées de chacun des trois premiers modes.

Un développement plus complet de l'élément fini ainsi que le programme d'éléments finis sont présentés à la référence [1; chapitre 5.1, 5.3, annexe A].

3.2.2 Modélisation de la face A du carter No 1

Le réseau final d'éléments utilisé, représenté à la figure 12, peut se diviser en deux types d'éléments: les éléments de la portion plaque et les éléments de la portion joints d'étanchéité, ces derniers étant hachurés sur la figure 12.

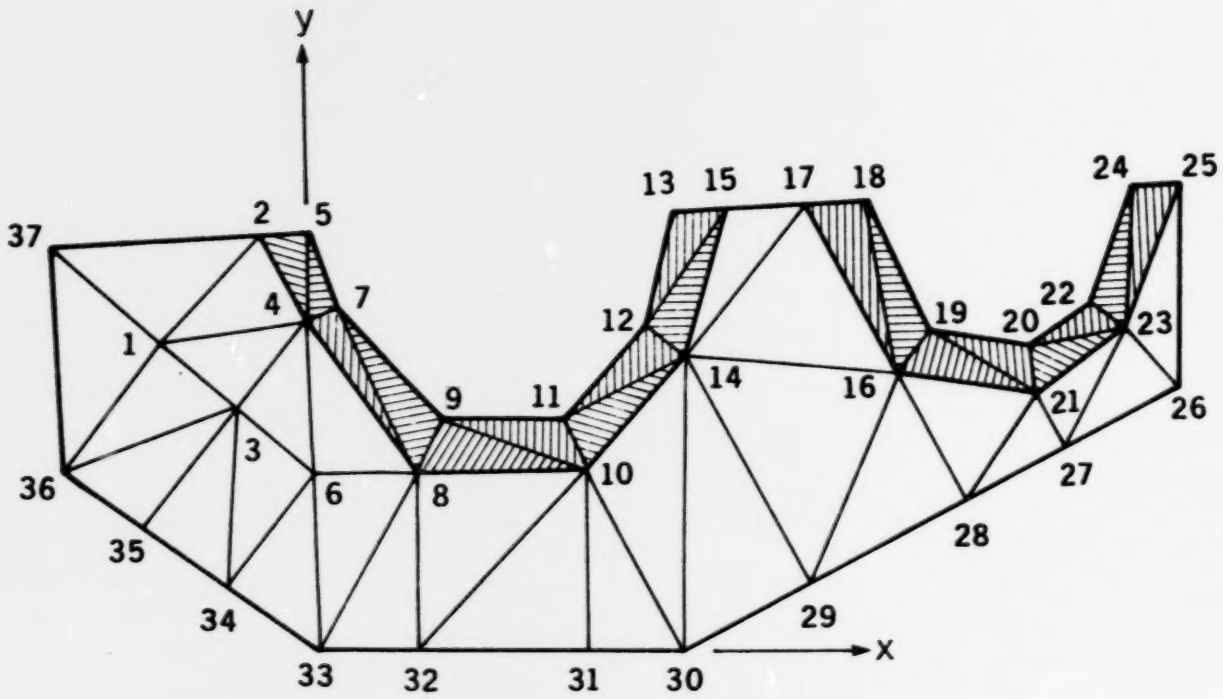
Pour les éléments des joints d'étanchéité, une rigidité, équivalente aux éléments de plaque, d'épaisseur égale à l'épaisseur moyenne mesurée de la paroi est considérée (t = 5.8 mm) tandis que l'épaisseur utilisée pour le calcul de la masse additionnelle est l'épaisseur restante du joint (t supplémentaire = 9.4 mm). Nous considérons ainsi que les joints d'étanchéité agissent surtout comme des masses supplémentaires et qu'ils contribuent à la rigidité uniquement comme une portion plaque. Pour les éléments de plaque, afin de conserver l'orthotropie du laminé, les coordonnées locales des éléments sont gardées parallèles à la direction des fibres du tissu stratifié (Figure 12).

Les conditions frontières sont définies comme un bord libre et un encastrement. Ainsi, aucun déplacement (degré de liberté) n'est permis pour les noeuds 25 à 37; les noeuds 2, 5, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 22, 24 n'ont pas de restriction de déplacements. Les propriétés des divers tissus utilisés sont les mêmes que celles utilisées au chapitre 3.1.2.

3.2.3 Fréquences propres et déformées des premiers modes de vibration

Les 3 premières fréquences propres calculées selon ce réseau d'éléments finis sont: 47.6 Hz, 61.6 Hz et 132 Hz. Les 3 premiers modes de vibration sont représentés aux figures 13, 14, 15.

Plusieurs réseaux grossiers tel que celui de la figure 16 furent essayés et montrèrent une convergence monotonique vers la première fréquence naturelle de 47.6 Hz. Cependant, nous devons faire particulièrement attention à la construction du réseau. Par exemple celui de la figure 17 qui montre un réseau en forme de croix a donné



Réseau d'éléments utilisé dans le calcul des fréquences naturelles et des modes de vibration

FIG. 12

une première fréquence naturelle passablement plus élevée (65.7 Hz) que celui de la figure 16 (45.8 Hz). Ces deux réseaux (figure 16 et figure 17) devraient, à première vue, donner des résultats semblables puisqu'ils contiennent respectivement 28 et 30 noeuds et 34 et 35 éléments. Une explication possible à cet écart dans les résultats est qu'à la figure 16, les côtés des éléments de la partie plaque suivent plus fidèlement la direction des fibres qu'à la figure 17, ce qui semble un facteur important.

4. AMORTISSEMENT

L'amortissement d'une poutre en fibre de verre-résine est produit presque exclusivement par la résine qui, seule, absorbe l'énergie. Deux modes de dissipation d'énergie sont présents dans une poutre, et selon les caractéristiques de la poutre, la dissipation d'énergie par flexion par rapport à celle en cisaillement varie. Ces caractéristiques sont le rapport du module de flexion sur le module de cisaillement (E_L/G_{LT}) et aussi le rapport de la longueur sur la hauteur pour une poutre à section rectangulaire [9].

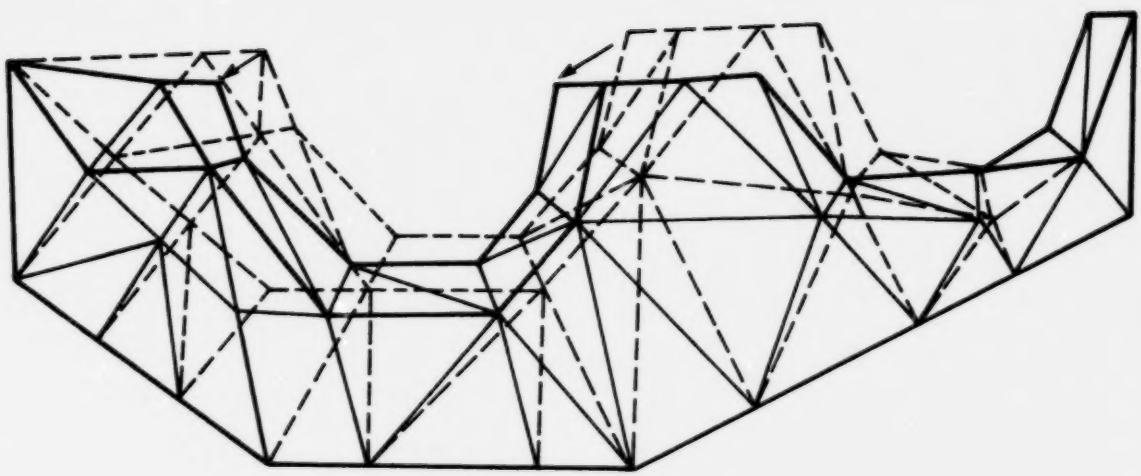
Selon [10], l'énergie d'amortissement absorbée par un matériau qui est le travail dissipé par unité de volume du matériau par cycle, peut s'exprimer par:

$$Dd = J\left(\frac{\sigma d}{\sigma e}\right)^n \qquad N\text{-}m/m^3 \text{ cycle} \qquad (32)$$

σd: contrainte maximale atteinte lors d'un cycle.
σe: limite d'endurance

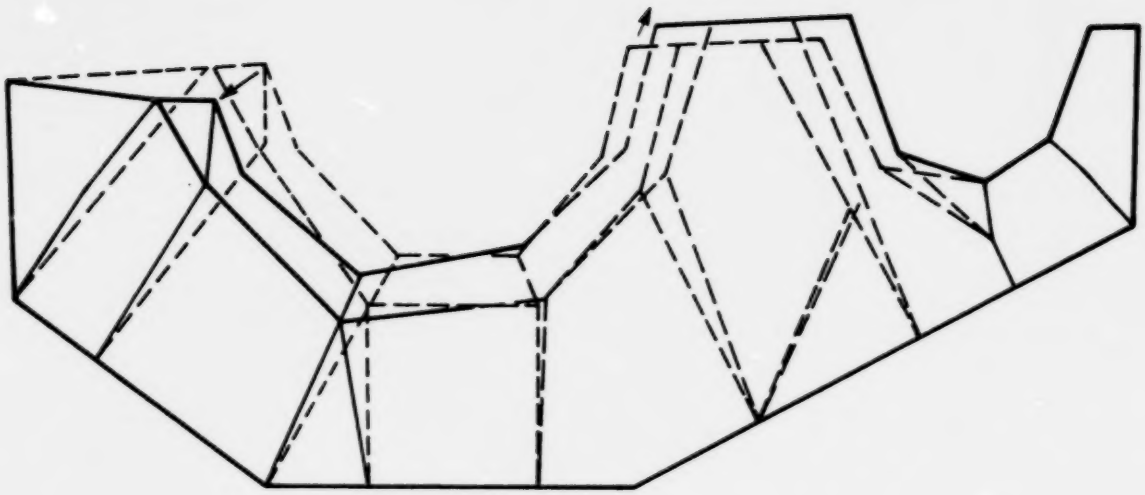
Le taux d'amortissement (η) d'une poutre longue, où l'énergie dissipée par cisaillement est négligeable, s'exprime par

$$\eta = \frac{E\ Dd}{\pi \sigma d^2} Ks\ Kc \qquad (33)$$



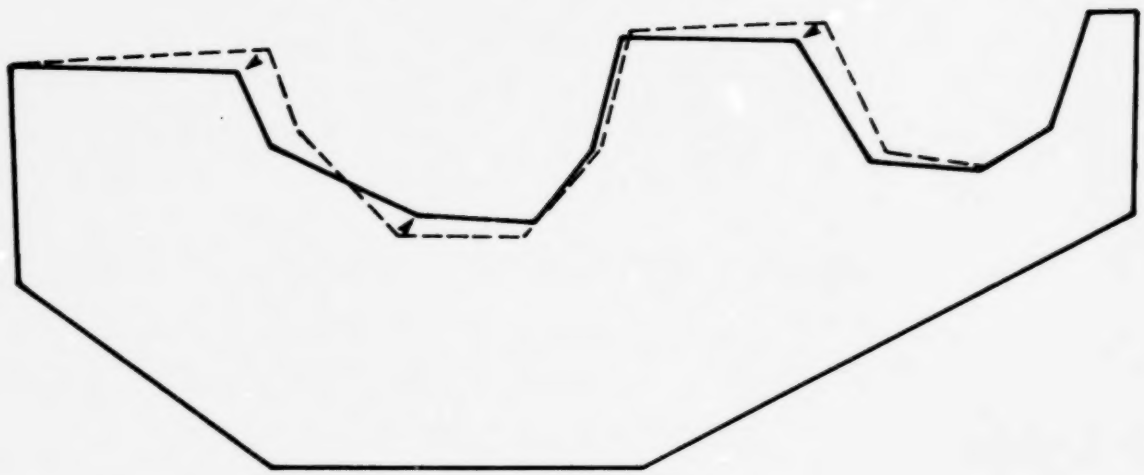
Déformée du premier mode de vibration

FIG. 13



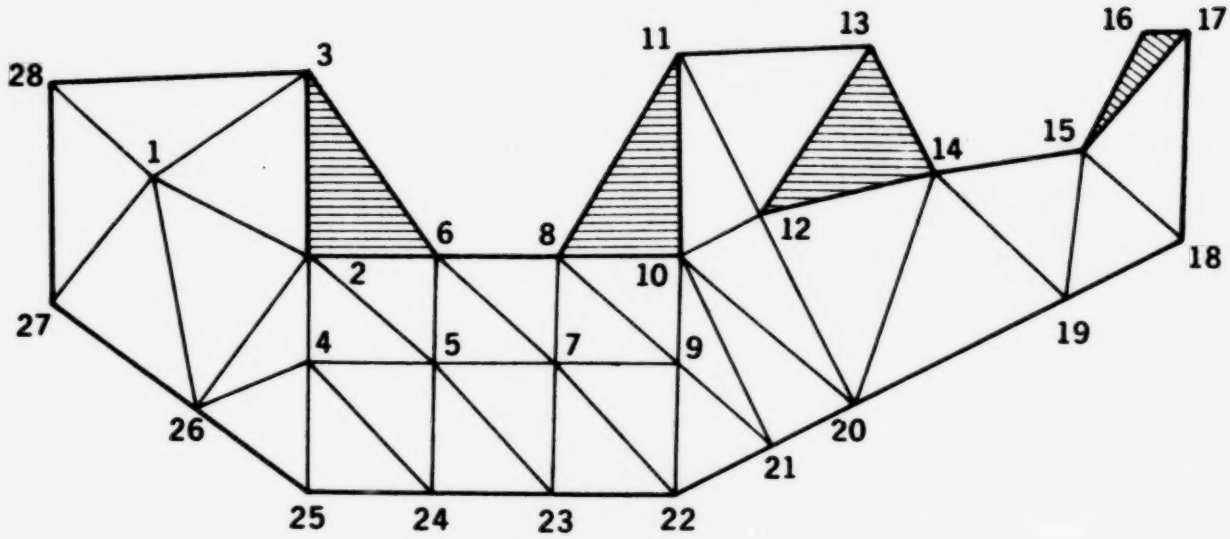
Déformée du deuxième mode de vibration

FIG. 14



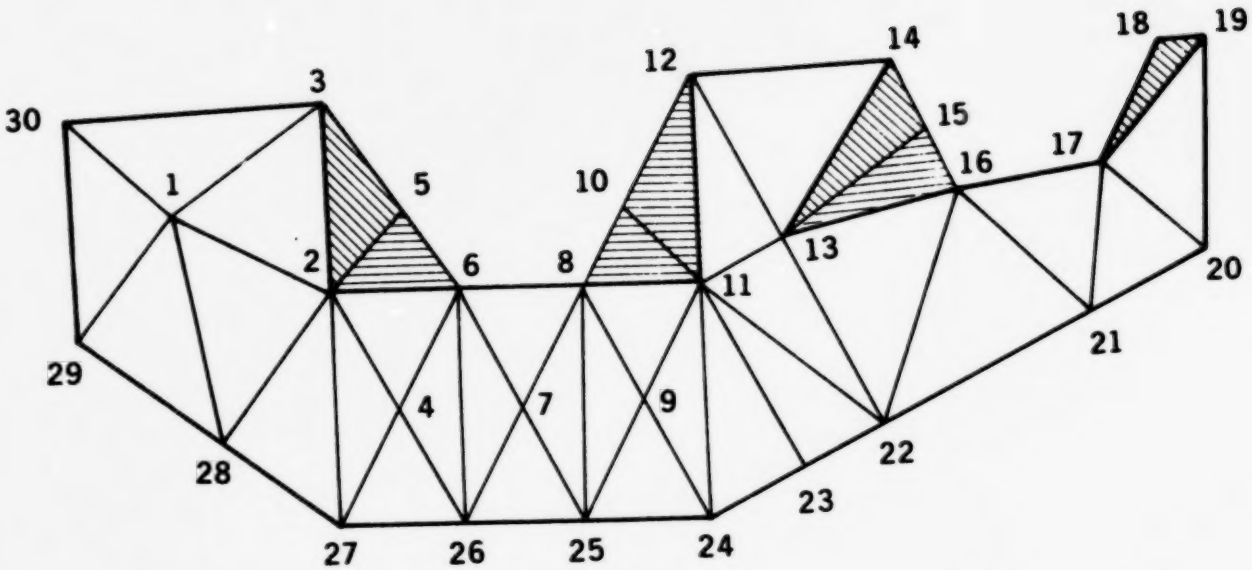
Déformée du troisième mode de vibration

FIG. 15



Réseau grossier d'élément

FIG. 16



Réseau grossier d'élément

FIG. 17

où Kc est un facteur pour tenir compte de la section de la poutre et Ks est un facteur qui prend en considération la distribution de contraintes le long de la poutre. Ces deux facteurs Kc et Ks sont des fonctions de l'exposant "n" de l'équation 32 et sont égaux à "1" lorsque n égale 2. Le taux d'amortissement (η) et le décrement logarithmique ($\Delta = \eta\pi$) dépendent du ratio de deux énergies, l'énergie d'amortissement (Dd) et l'énergie de déformation ($\sigma d^2/E$).

Puisque l'énergie de déformation augmente selon le carré des contraintes pour des matériaux linéaires, le décrement logarithmique est constant quelque soit le niveau des contraintes et est indépendant de la forme de la section et de la distribution de contraintes si l'énergie d'amortissement varie selon le carré des contraintes (n = 2).

Selon les références [11, 12], le taux d'amortissement (η) d'une poutre longue (longeur/hauteur > 80) libre-libre à fibres unidirectionnelles est indépendant des déplacements et donc indépendant de la distribution des contraintes [10]. De ce fait, l'amortissement d'une poutre libre-libre peut s'appliquer directement à toutes les poutres longues, peu importe leur mode de support, donc au cas d'une poutre encastrée-libre.

Pour des poutres longues, où l'amortissement par cisaillement est négligeable, l'amortissement est plus faible pour des tissus stratifils dans les directions de la trame et de la chaîne car selon ces axes, il y a un pourcentage moins important d'énergie emmagasinée dans la résine [13, 14]. De même, l'amortissement pour des tissus mats sera plus élevé que pour des tissus stratifils présentant la même fraction volumique. Si la poutre est courte, la dissipation d'énergie par cisaillement n'est plus négligeable comparativement à l'énergie dissipée par la flexion et augmente l'amortissement de la poutre [9]. Ainsi, l'amortissement basé sur une poutre longue avec fibre longitudinale représente un minimum.

En supposant un volume égal d'un tissu mat et d'un tissu stratifil ($tm = t_{Lt}$), la fraction volumique en fibre de verre du laminé est:

d résine = 1.4 gr/cm^3

d fibre de verre = 2.54 gr/cm^3

4 tissus mats 20% en poids de fibre de verre

2 tissus stratifils 45% en poids de fibre de verre

$$Vf = \frac{\left[\frac{4 \times .2}{2.54} + \frac{2 \times .45}{2.54}\right]\left[\frac{\frac{.20}{2.54} + \frac{.8}{1.4}}{\frac{.45}{2.54} + \frac{.55}{1.4}}\right]}{6\left[\frac{.20}{2.54} + \frac{.8}{1.4}\right]} = .185 \approx 20\% \qquad (34)$$

Selon les références 11 et 12, le taux d'amortissement est de l'ordre de .004 pour une fraction volumique approximative de 20%.

5. CALCUL DES DEFORMATIONS

5.1 Calcul des déformations sous vibration

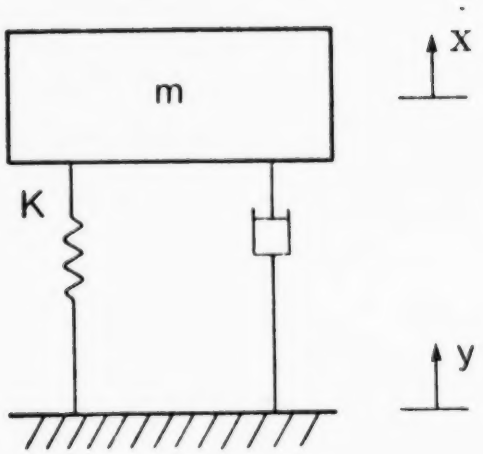
Le calcul des déformations est fait en utilisant les propriétés d'un système masse ressort amorti, figure 18. La rigidité du ressort de ce système équivalent est égale à celle de la poutre sans masse dont la déflexion est prise à l'extrémité libre. La masse équivalente d'un tel système est calculée en appliquant le principe de la conservation d'énergie cynétique du système original. Ainsi la masse équivalente associée au déplacement de l'extrémité libre de la poutre doit posséder la même énergie cynétique que l'ensemble de la poutre.

Pour un système amorti masse-ressort excité par la base, tel qu'illustré à la figure 18, la réponse du système est

$$z = (x - y) = Z \sin(\omega_f t - \phi) \qquad (35)$$

où

$$Z = \frac{r^2 Y}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\eta r)^2}} \qquad (36)$$



Système amorti masse-ressort équivalent

FIG. 18

$$\phi = tg\left(\frac{2\eta r}{1-r^2}\right) \qquad (37)$$

Si la fréquence d'excitation ω_f égale la fréquence naturelle ω_n (r=1), alors Z = Y/2η et $\phi = \pi/2$. Le déplacement de la base $y = Y \sin \omega_f t$ impose une accélération de $\ddot{y} = -Y\,\omega_f^{\,2} \sin \omega t$. Donc l'accélération imposée $|Y\,\omega_f^{\,2}| = |Y\,f_f^{\,2} \times 4\pi^2|$ nous donne un déplacement maximal Z = Y/2η pour le système amorti masse-ressort [8]. En utilisant les fréquences propres du carter 1 mesurées au laboratoire, et une accélération de un "g", on obtient les valeurs suivantes pour l'amplitude d'excitation Y du système équivalent:

face A: $f_f = 40.5$ Hz ; Y = 0.152 mm
face B: $f_f = 43.5$ Hz ; Y = 0.131 mm

L'encastrement du modèle de poutre est la base du système équivalent. Pour une accélération de 1g, appliquée par l'intermédiaire des brides de fixation à l'encastrement de la poutre, la déformation maximale de la poutre est:

$$\mu\varepsilon \text{ max} = \mu\varepsilon \text{ statique} \times \frac{Z}{vi \text{ max}} \qquad (38)$$

5.2 Calcul des déformations en utilisant la méthode analytique

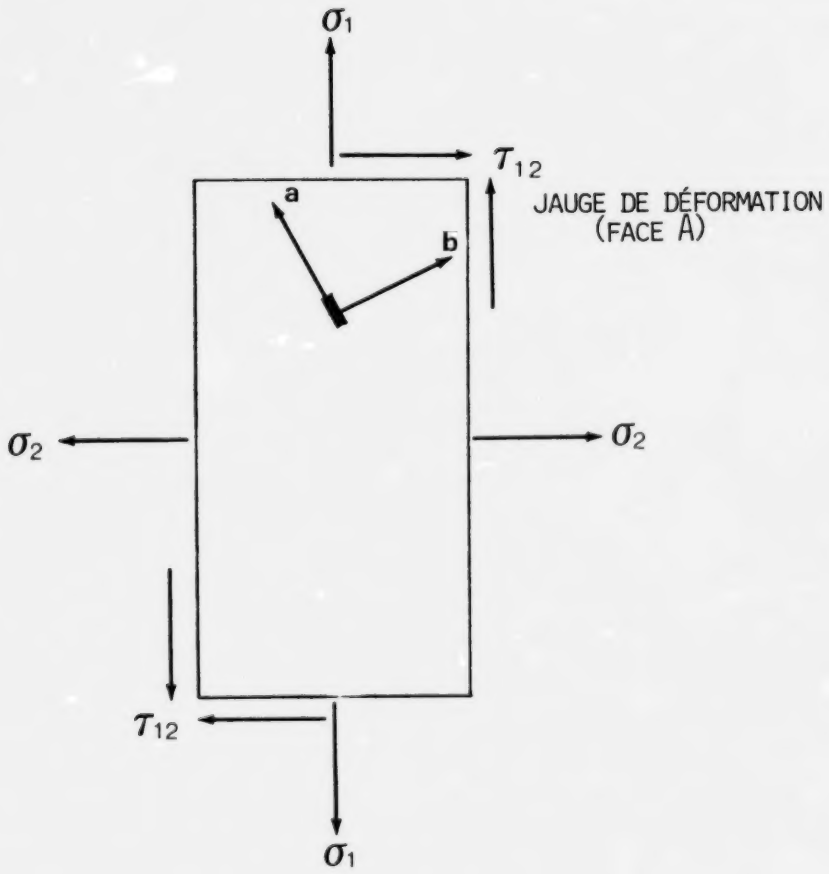
5.2.1 Déformations de la poutre A

Pour un tissu stratifil orthotropique (figure 19), sous tension uniaxiale ($\sigma_2 = \tau_{12} = 0$)

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma_1}{10.43 \text{ GPa}}$$

$$\varepsilon_2 = -\nu_{12}\,\varepsilon_1 = -.30\,\varepsilon_1 \qquad (39)$$

$$\gamma_{12} = -m_1\,\varepsilon_1 = +.106$$



ETAT DE CONTRAINTES (POUTRE A)

FIG. 19

où

$$\frac{E_L}{E_1} = \cos^4\alpha + \sin^4\alpha + \frac{1}{4}\left[\frac{E_L}{G_{LT}} - 2\nu_{LT}\right]\sin^2\alpha$$

$$\nu_{12} = \frac{E_1}{E_L}\left[\nu_{LT} - \frac{1}{4}\left(1 + 2\,\nu_{LT} + \frac{E_L}{E_T} - \frac{E_L}{G_{LT}}\right)\sin^2(2\alpha)\right]$$

$$m_1 = \sin 2\alpha\left[\nu_{LT} + \frac{E_L}{E_T} - \frac{E_L}{2\,G_{TL}} - \cos^2\alpha\left(1+2\nu_{LT} + \frac{E_L}{E_T} - \frac{E_L}{G_{LT}}\right)\right]$$

$E_T = E_L = 11$ GPa
$\nu_{LT} = .26$
$G_{LT} = 3.76$ GPa

Pour un tissu mat, considéré isotrope, sous tension uniaxiale,

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma_1}{6\text{GPa}} \qquad (40)$$

$\varepsilon_2 = -\nu m\ \varepsilon_1 = -.28\varepsilon_1$
$\gamma_{12} = 0$

Selon les orientations a ($\alpha = 23.6$; direction de la jauge de déformation) et b (direction transversale à la jauge de déformation), les déformations 1, 2 sont modifiées par les équations suivantes:

$$\varepsilon a = \varepsilon_1 \cos^2\alpha + \varepsilon_2 \sin^2\alpha + 1/2\ \gamma_{12} \sin^2\alpha$$
$$\varepsilon b = \varepsilon_1 \sin^2\alpha + \varepsilon_2 \cos^2\alpha - 1/2\ \gamma_{12} \sin^2\alpha \qquad (41)$$

Ainsi pour le tissu stratifil

$$\varepsilon a = .83\varepsilon_1$$
$$\varepsilon b = -.13\varepsilon_1 \qquad (42)$$

et pour le tissu mat

$$\varepsilon a = .79\varepsilon_1$$
$$\varepsilon b = -.09\varepsilon_1 \qquad (43)$$

L'effet du coefficient de poisson entre les 2 couches du laminé ayant une influence négligeable sur le comportement du laminé, on peut approximer la déformation de la jauge par

$$\varepsilon a \simeq .8\varepsilon_1 \tag{44}$$

Ainsi, pour la poutre A, la déformation longitudinale ε_1 égale

$$\varepsilon_1 = \left.\frac{c\, d^2v}{dx^2}\right|_x \tag{45}$$

où v est la déformée statique de la poutre et c est la distance entre l'axe neutre et le point considéré.

Pour la poutre A, si le calcul est fait à la position des jauges de déformation (figure 5, x = 284.5 mm), en utilisant dans l'équation 45,

c = (1-.46) t = .54t = 2.6 mm

et

$$v(\text{mm}) = 218.0209 - 1.0157\, x\ (\text{mm}) + 3.9169 \times 10^{-3}\, x^2 - 3.9251 \times 10^{-5}\, x^3 + 1.9201 \times 10^{-7}\, x^4 - 4.5905 \times 10^{10}\, x^5 + 4.8581 \times 10^{-3}\, x^6$$

(obtenu par interpolation polynomiale des valeurs du tableau 2)

on obtient une déformation longitudinale ε_1 = égale à 29×10^{-6}.

La déformation maximale enregistrée par la jauge, sous une accélération de 1g, est

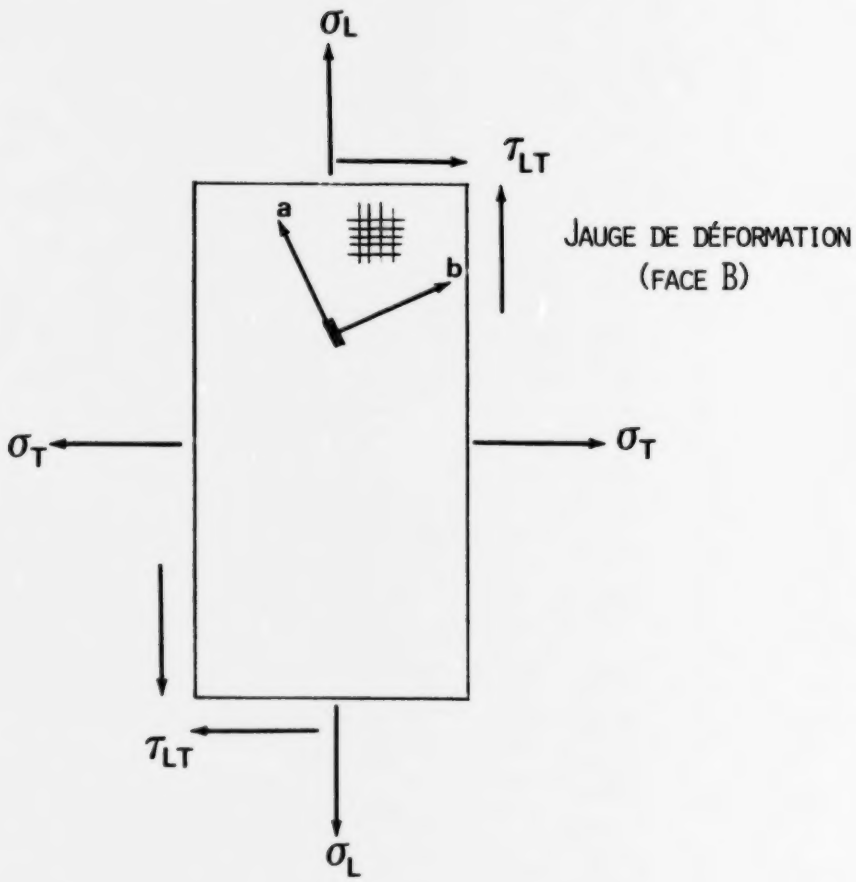
$$\mu\varepsilon a \text{ max} = .8\mu\varepsilon_1 \times \frac{z}{vi \text{ max}} = \frac{29 \times .8 \times .152 \text{ mm}}{2 \times .004 \times 20.8 \text{ mm}} = 2170 \tag{46}$$

5.2.2 Déformations de la poutre B

Pour un tissu stratifil orthotropique (figure 20), sous tension uniaxiale

$$\varepsilon_L = \frac{\sigma_L}{E_L}$$

$$\varepsilon_T = -\nu_{LT}\, \varepsilon_L \tag{47}$$



ETAT DE CONTRAINTES (POUTRE B)
FIG. 20

$\gamma_{LT} = 0$

et, pour un tissu mat,

$$\varepsilon_L = \frac{\sigma_L}{Em}$$

$$\varepsilon_T = -\nu m \, \varepsilon_L \qquad (48)$$

$\gamma m = 0$

Selon les orientations a et b, les déformations L, T sont modifiées par l'équation 41. Ainsi pour le tissu stratifil et pour le tissu mat

$$\varepsilon a = .8 \, \varepsilon_L \qquad (49)$$

Pour la poutre B, si le calcul est fait à la position des jauges de déformation (figure 6, X = 266.7 mm), en utilisant dans l'équation 45.

$c = (1 - .70)\ t = 1.4$ mm

où v (mm) = $96.9580 - .4369 \ x\ (mm) + 2.6925 \times 10^{-4} x^2 - 4.3388 \times 10^{-6} x^3 + 2.4554 \times 10^{-8} x^4 - 4.1586 \times 10^{-11} x^5 + 4.1845 \times 10^{-14} x^6$

(obtenu par interpolation polynomiale du tableau 2)

on obtient $\varepsilon_L = 7.3 \times 10^{-6}$ et ainsi, par l'équation 38, on obtient

$$u\varepsilon \max = \frac{.8 \times 7.3 \times .131 \text{ mm}}{2 \times .004 \times .087 \text{ mm}} \approx 1100 \qquad (50)$$

De même façon, le calcul des déformations du carter 2 est présenté à l'annexe B.4. Les déformations du carter 2 sont respectivement 1700 et 780 pour la face A et la face B.

5.3 Calcul des déformations de la face A du carter en utilisant la méthode des éléments finis

Pour calculer les déformations, nous utilisons l'équation 19. La matrice $[A^{-1}]$ est construite à partir des noeuds 14 (.3683 m, .3175m), 29 (.5055m, .07112 m) et 30 (.3683 m, 0). Le vecteur $\{q\}^t$, obtenu en solutionnant l'équation aux valeurs propres (31) est égal à (.2496 m, .4206, .1825, 0, 0, 0, 0, 0, 0) (voir ref. 1, annexe A).

Ainsi en remplaçant dans l'équation 19 et en évaluant à la position des jauges (x = .465m, y = .109m), on trouve le vecteur $\{\epsilon\}^t$ égal à : $(6540 \times 10^{-6}, -13690 \times 10^{-6}, 39980 \times 10^{-6})$.

Pour obtenir la déformation dans l'axe de la jauge, on emploie l'équation 41 ($\alpha = 23.6°$). Ceci nous donne $\varepsilon\alpha = 25\ 100 \times 10^{-6}$ et, transversalement à cette jauge, on obtient $\varepsilon = -18\ 000 \times 10^{-6}$.

La déflexion maximale de la déformée du premier mode est 263.7 mm (W max) au noeud 17 (voir ref. 1, annexe A). Pour une accélération de 1 g imposée aux brides de fixation, en utilisant le même déplacement maximal calculé par l'amortissement pour la poutre A, on obtient une déformation de

$$u\varepsilon_{max} = \frac{\mu\varepsilon\ \alpha\ Z}{W\ max} = 1800 \qquad (51)$$

6. DISCUSSION

Les résultats selon les deux analyses théoriques et les résultats expérimentaux sont résumés au tableau suivant:

TABLEAU 3

	carter 1 face A	carter 1 face B	carter 2 face A	carter 2 face B
fréquence naturelle				
analyse par modèle simplifié	50	76	41	64
analyse par la méthode des élément finis	47.6	-	-	-
résultats expérimentaux	40.5	43.5	45	50
déformation des jauges sous vibration ($\mu\varepsilon\alpha$ max)				
analyse par modèle simplifié	2170	1100	1700	780
déformation transversale à la jauge	$\simeq .1\varepsilon\alpha$	-	-	-
analyse par éléments finis	1800	-	-	-
déformation transversale à la jauge	$\simeq .7\varepsilon\alpha$	-	-	-
résultats expérimentaux	400	475	225	330

Le carter a une géométrie qui ne peut être facilement approximée par une modélisation simple. Notre modèle simplifié ne peut être valable que pour le premier mode de vibration, facilement définissable comparativement aux modes supérieurs de vibration. Les résultats obtenus confirment qu'il est possible de prédire l'ordre de grandeur de la première fréquence naturelle. Ainsi, pour les deux carters examinés, la précision obtenue pour la face A est de l'ordre de 23% et pour la face B, nos prédictions sont jusqu'à 70% supérieures à la réalité. Il semble donc que la modélisation de la face A par une poutre longue est plus appropriée que pour la face B.

L'analyse par éléments finis peut traiter des géométries complexes tel que le carter et nous permet de déterminer les fréquences propres et les déformées des premiers modes de vibration. La prédiction de la

première fréquence naturelle de la face A des carters est supérieure de 17% à la réalité.

Dans le calcul des déformations longitudinales, le modèle simplifié ne tient pas compte de la rigidité transversale de la plaque que constitue le plan du carter. Les déformations longitudinales maximales ($\mu\varepsilon\alpha$ max) induites lors du phénomène de résonnance, calculées à l'aide de l'amortissement, sont nettement supérieures à la réalité (5.4 à 7.6 fois pour la face A, 2.3 à 2.4 fois pour la face B).

L'élément triangulaire plan de notre modèle d'éléments finis tient compte de la rigidité transversale de la plaque. Ainsi, la déformation transversale à la jauge de déformation est égale à approximativement .7 $\varepsilon\alpha$ (déformation longitudinale de la jauge) tandis que selon notre modèle simplifié de la poutre, celle-ci n'est égale qu'à .1 $\varepsilon\alpha$. Les déformations maximales des jauges de déformations calculées ($\mu\varepsilon\alpha$ max) sont 4.5 fois supérieures à la réalité. La déformation transversale calculée par la méthode des éléments finis correspond bien à ce qui a été observé expérimentalement (.55 à .7$\varepsilon\alpha$).

La valeur de l'amortissement obtenue de la littérature consultée donne une approximation trop faible de l'amortissement présent dans le carter si l'on se fie à la précision obtenue par la prédiction des déformations maximales dans les deux méthodes. Cela est, d'autre part, confirmé par le fait que la flèche maximale observée est environ 2 à 3 fois inférieure au déplacement maximal que l'on a utilisé dans les différents calculs [z = 19mm (carter no 1) et z = .60po (carter no 2)].

7. CONCLUSION

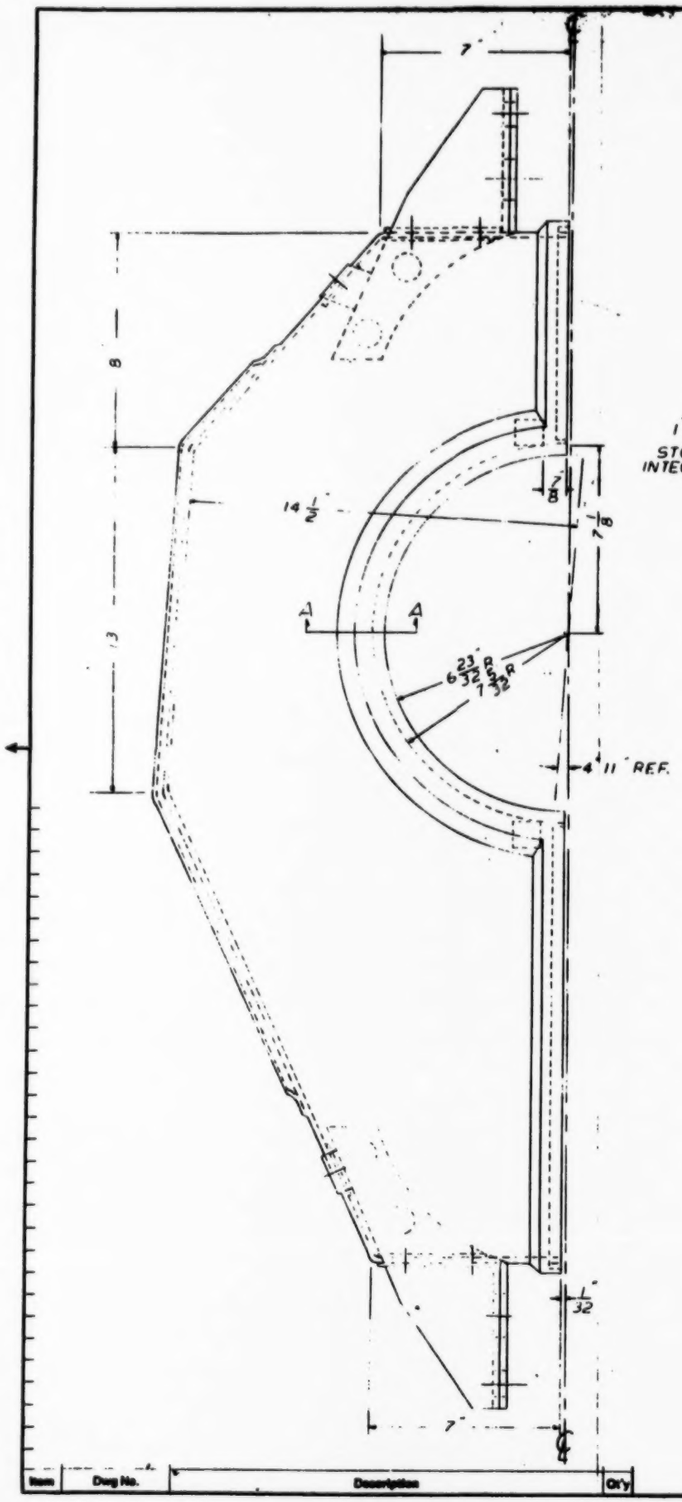
Cette étude ne permet pas de tirer des conclusions définitives quant à la sophistication des méthodes de calcul que l'on doit utiliser pour concevoir des pièces en matériau composite (fibre de verre dans une matrice de résine) fabriquées par moulage contact.

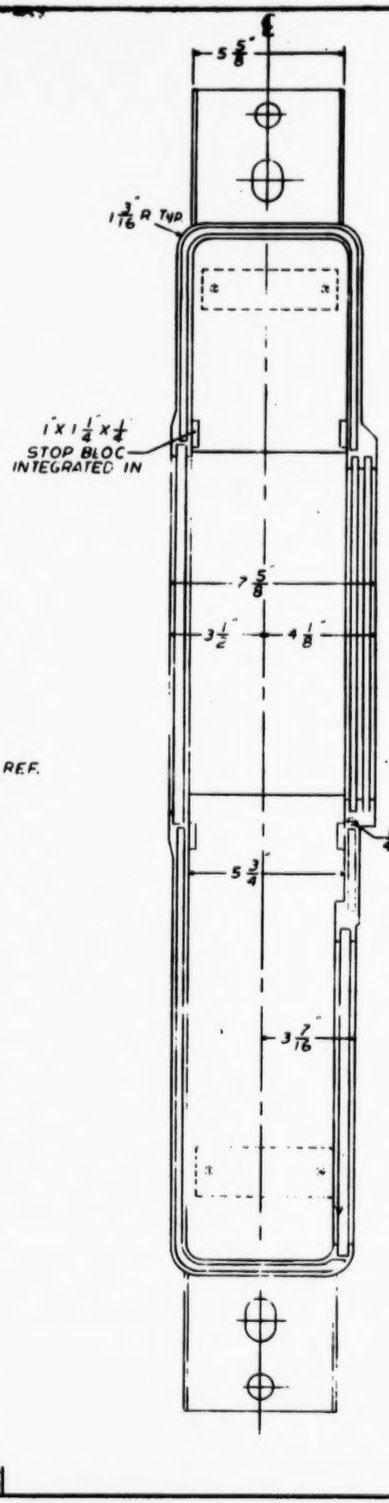
Dans le cas présent, le carter a une géométrie complexe difficile à approximer par un modèle simple. La méthode des éléments finis se prête bien pour modéliser des géométries complexes.

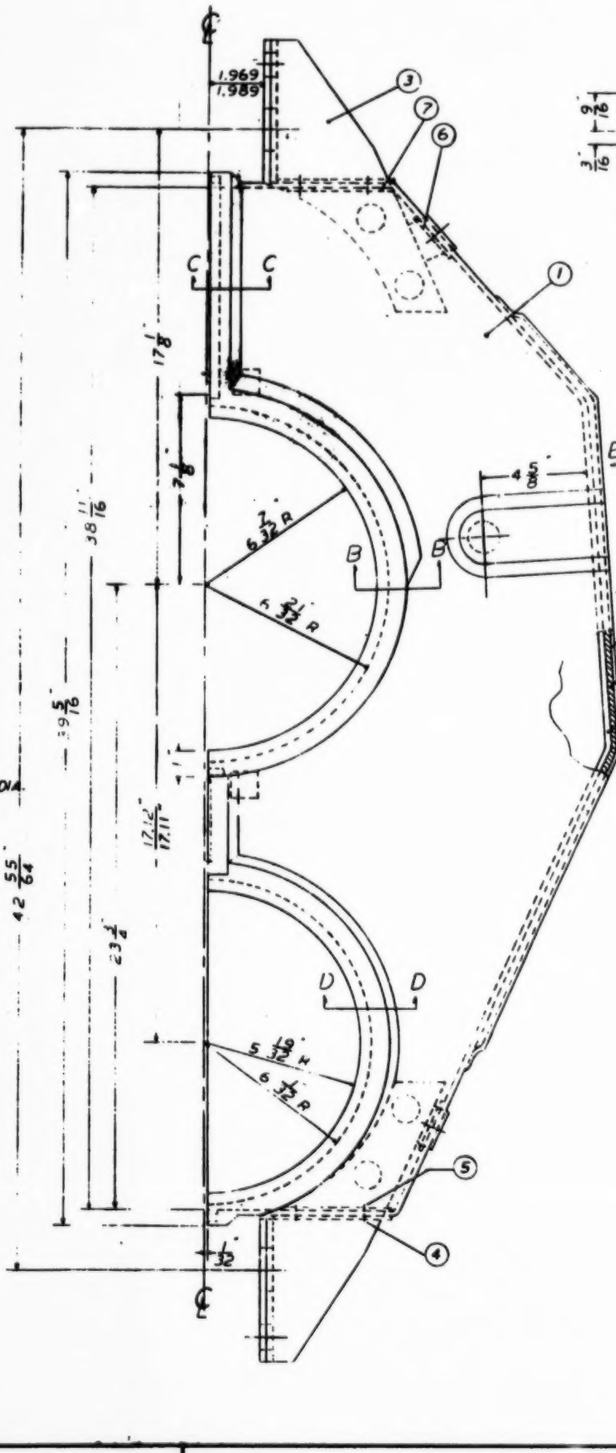
Quoique les deux méthodes de calcul donnent des résultats de précision similaire, la méthode des éléments finis donne une information plus complète (détermination des premières fréquences propres et des déformées des modes de vibration correspondants, calcul des déformation quelque soit la position examinée sur la face A du carter) et plus représentative de la réalité. Cela est attribuable au fait que la méthode des éléments finis résout un problème à deux dimensions (face A du carter) tandis que le modèle simple approxime les faces du carter par une seule dimension.

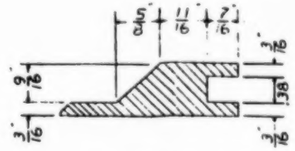
Ainsi, lors de la conception d'un prototype, la méthode analytique (modèle simple) étant plus flexible, son utilisation pour le dimensionnement initial d'un prototype est tout-à-fait justifié. L'utilisation de la méthode des éléments finis, par la suite, pour des fins de vérification de conception, paraît approprié.

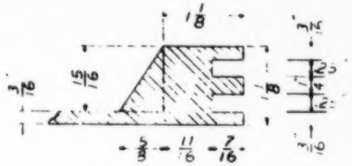
ANNEXE A

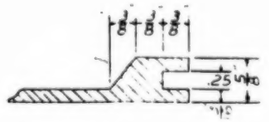


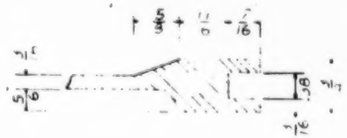


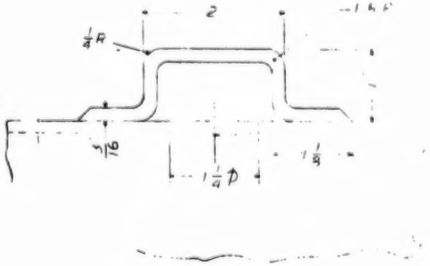












VIEW E-E

NOTE : ALL BACKING PLATE ⑥⑦ TO BE COVERED BY FIBERGLASS

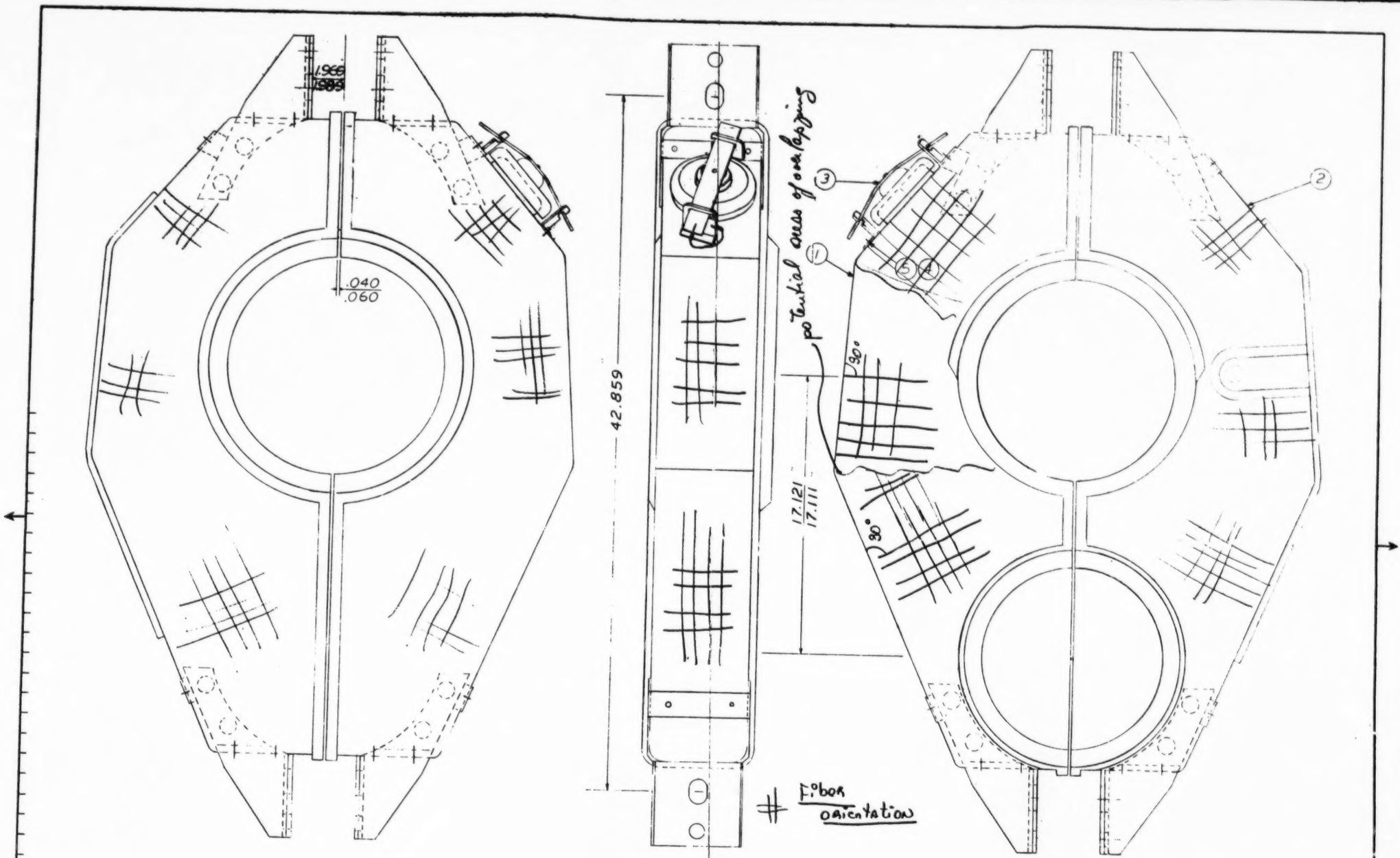
Item	Dwg No.	Description	Qty

REDRAWED 01-81

BOMBARDIER LTD VALCOURT QUE. CANADA

F.R.P.

GEAR CASE LOWER HALF



Art.	No. de dessin	Description	Qté
5		COLLARS 1/4 ϕ	27
4		HUCK BOLTS 1/4 ϕ	27
3		FILLING COVER ASS. F.R.P.	1
2		LOWER ASS. F.R.P.	1
1		UPPER ASS. F.R.P	1

Let.	Révisions	Des.

Ce document est la propriété exclusive de BOMBARDIER LIMITÉE, Valcourt, Qué., et ne peut être utilisé ou reproduit, ni son contenu complet ou partiel dévoilé à d'autres, par qui que ce soit, sans le consentement écrit de BOMBARDIER LIMITÉE.

BOMBARDIER LTÉE VALCOURT QUÉ. CANADA

Ne pas mesurer

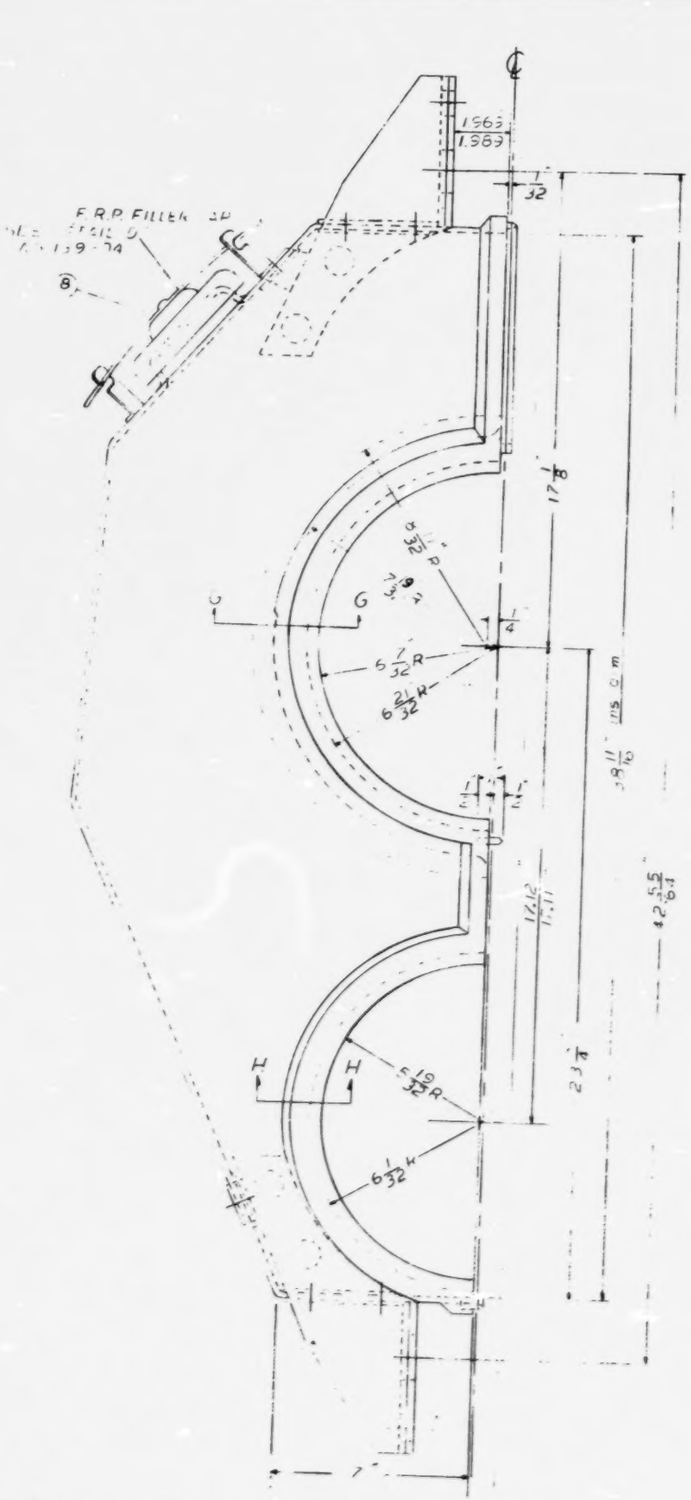
Tolérances non spécifiées
0 Déc. ±
1 Déc. ±
2 Déc. ±
Angle ±

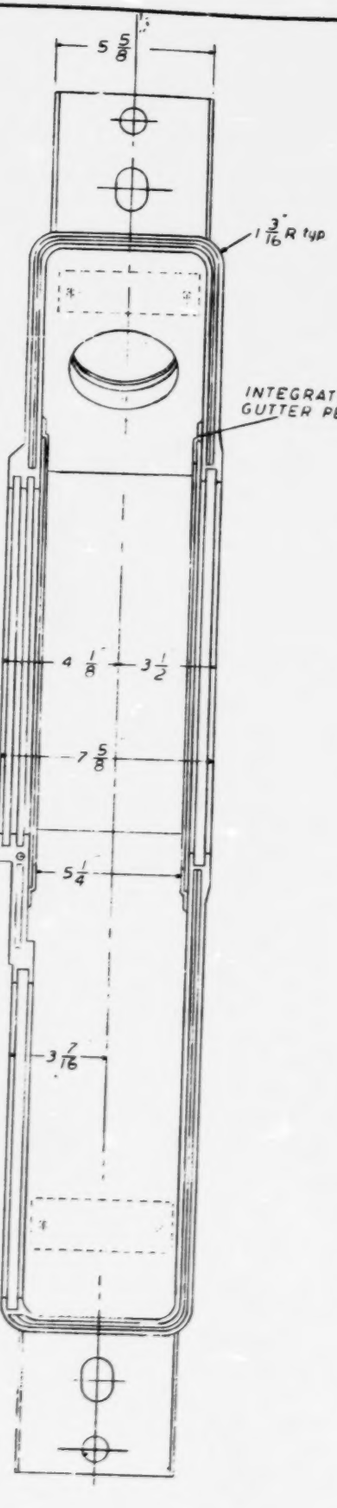
Ech. 1/4 : 1 | Date 19-12-80
Dess. JD | Vér. LLB
App. | Date 5/1/81
Code

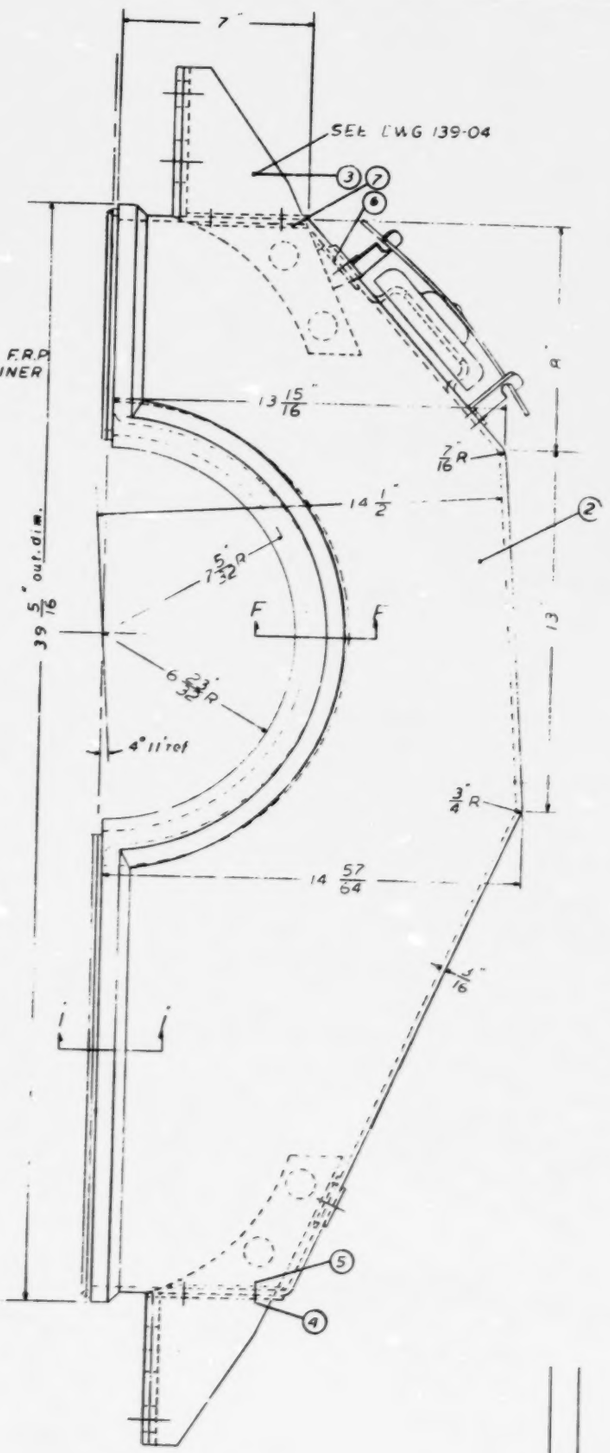
Matériau F. R. P. | Modèle G M.

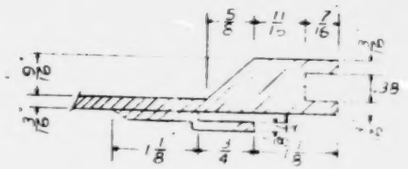
Fini | Réf.

Titre GEAR CASE | No dessin 139-01-R

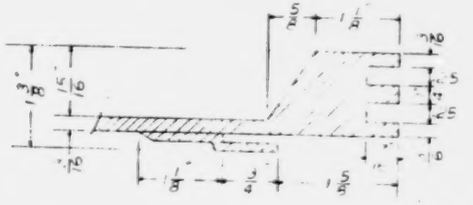




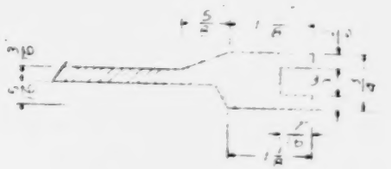




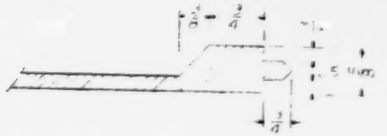
SECTION F-F



SECTION G-G



SECTION H-H



SECTION I-I

Item	Dwg No.	Description	Qty

This document is the exclusive property of BOMBARDIER LIMITED Valcourt, Que., and may not be used or reproduced nor its content or part there of disclosed to others by any person or company save with the express consent in writing from BOMBARDIER LIMITED

Do not scale

Unspecified tolerances
2 Dec. ± .010
3 Dec. ± .005
Front ± .010
Angle ±

BOMBARDIER LTD VALCOURT QUE CANADA

Material: F.R.P.

Finish

Title: GEAR CASE UPPER HALF

Scale: 1/8 = 1"

Date: 21-01-81

Dr. [illegible]

Chk

App

Date

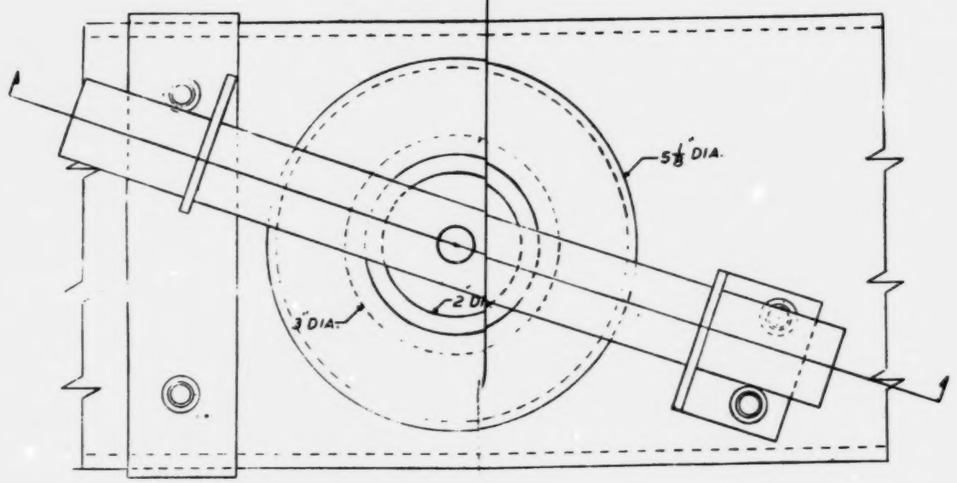
Project: CANAM

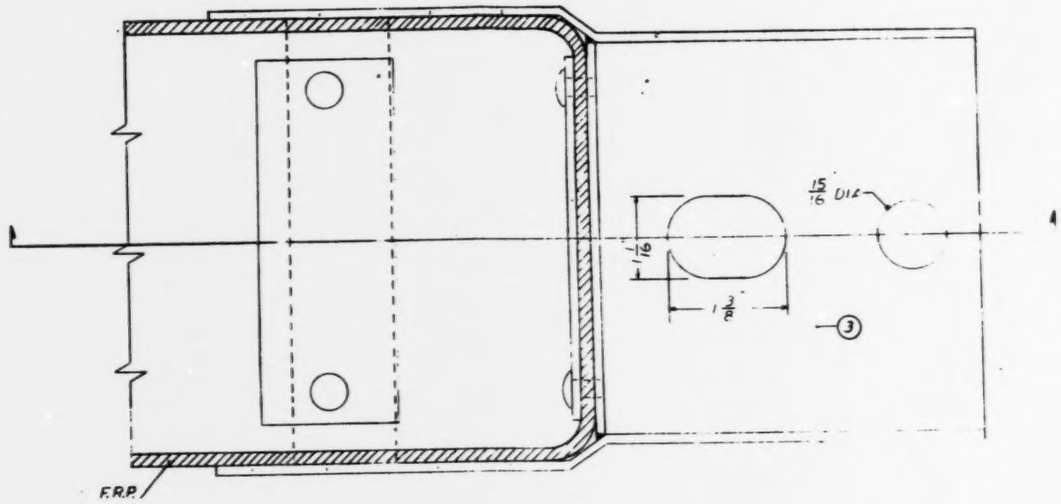
Model: G.M.

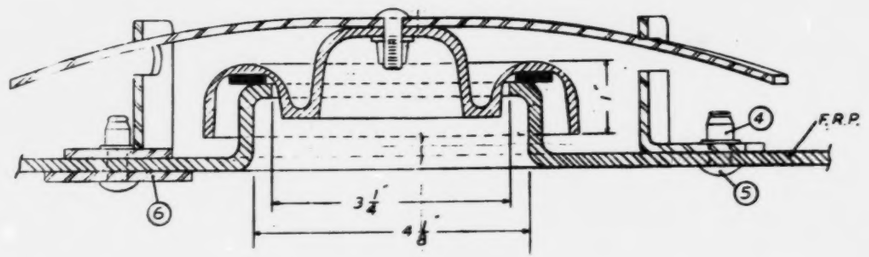
Ref.

Dwg: 139-03

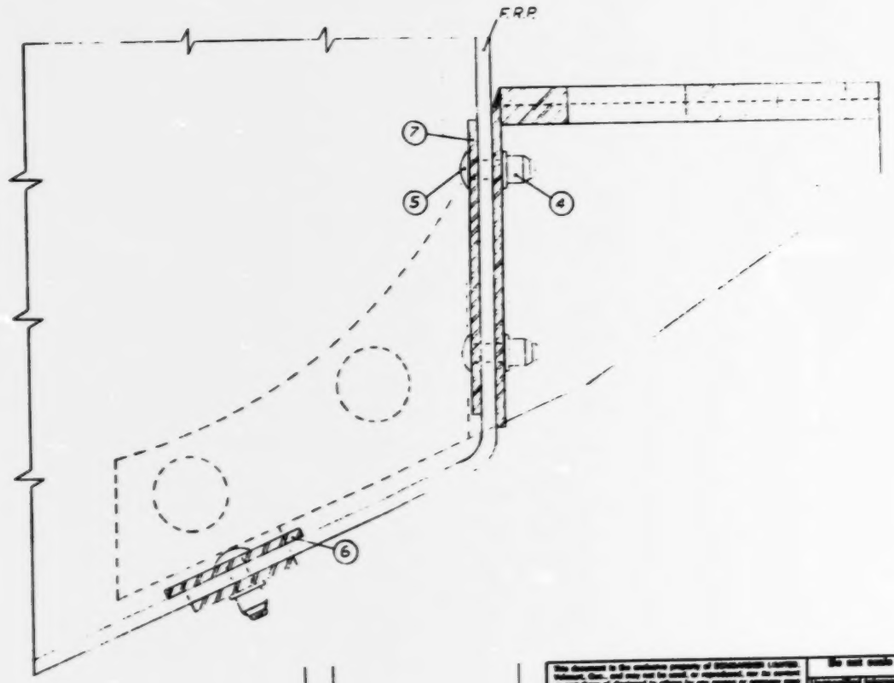
Let.	Revisions	Dr.
	REDRAWEC 01-81	







DETAIL 'D'



NOTE ALL BACKING PLATE ⑥ ⑦ TO BE COVERED BY FIBERGLASS

Item	Dwg No.	Description	Qty
8		[illegible] F.R.P.	1
7		[illegible]	4
6		[illegible] PLATE	4
5		HUCK BOLTS 1/4" Ø	27
4		COLLARS 1/4 Ø	27
3		SUPPORT BRACKET	4
2		UPPER ASS.	1
1		LOWER ASS. F.R.P.	1

REDRAWED 02-81

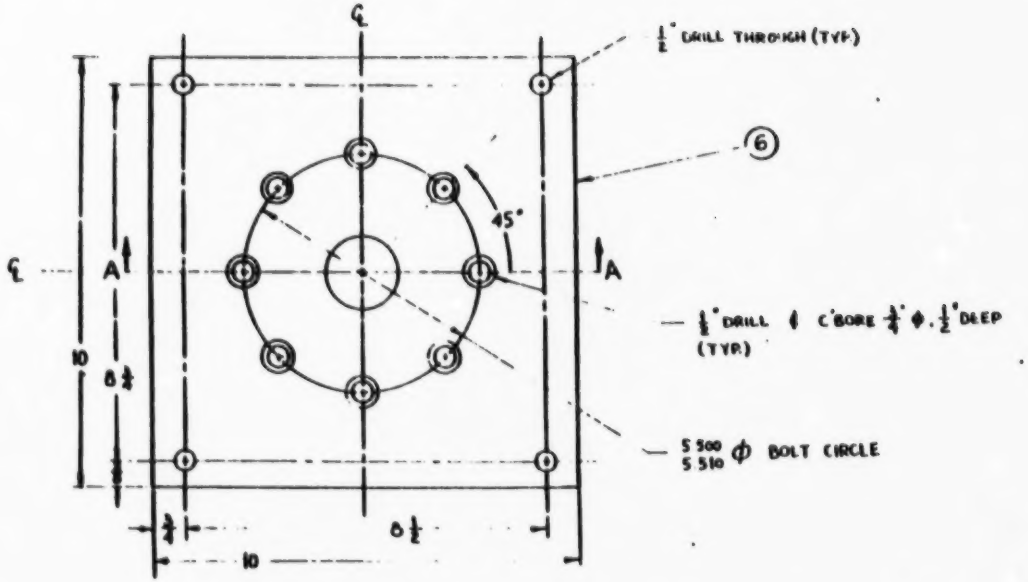
SCHLUMBERGER LTD VALCOURT QUE CANADA

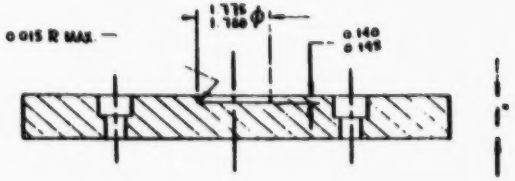
Project CANREF

Model G.M.

Title DETAILS

Dwg 139-04

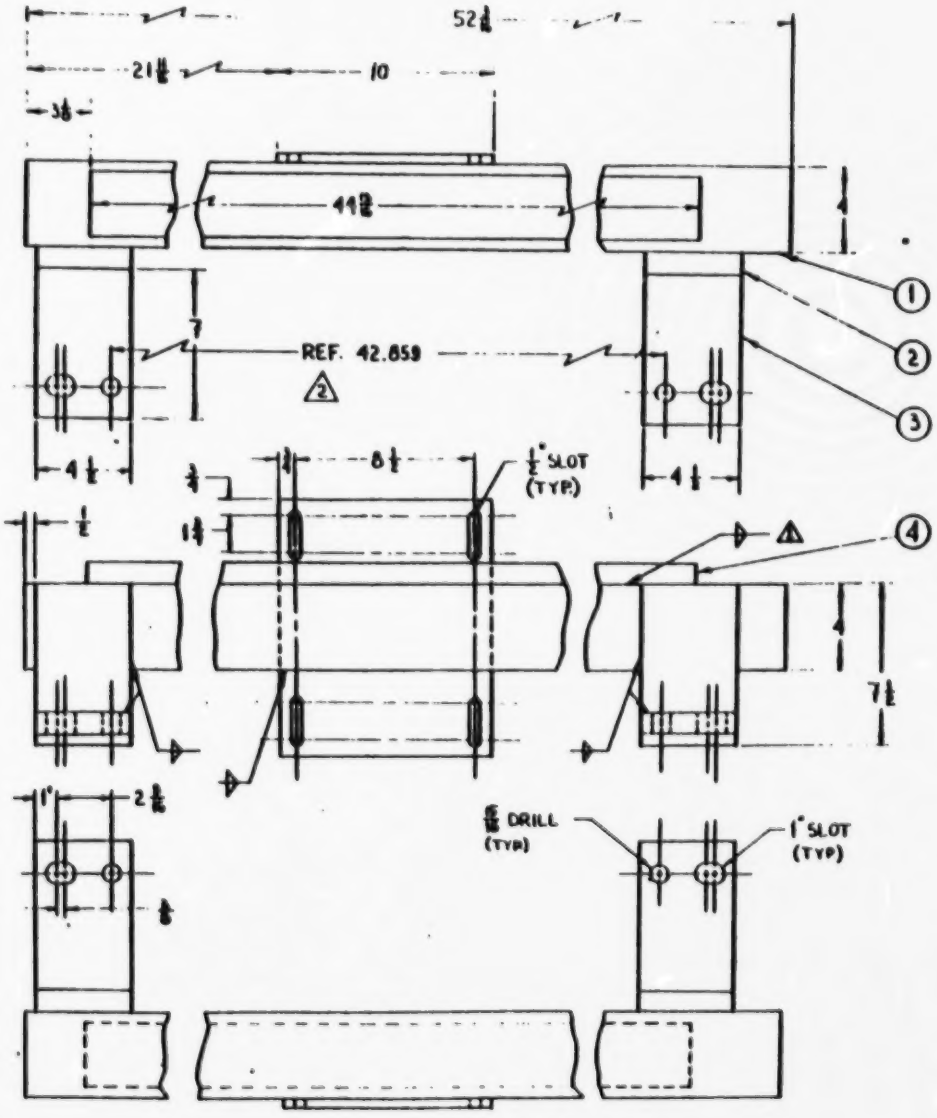


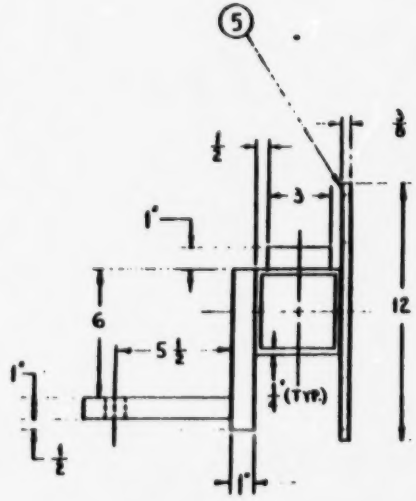


6	COLD FINISHED ST. C-1020	
CONCORDIA UNIVERSITY MONTREAL		
MOUNT. PLATE (BRACKET)		
DR. BY: P. OUELLETTE		
81.04.23	SCALE: ½" = 1"	2 OF 2

GEN. TOL. : $\pm \frac{1}{64}$"

1. TACK WELD AT 9" INTERVALS
2. DIMENSION TO SUIT GEARCASE





5				
4				
3				
2	COLD FINISHED ST C-1020			
1	SQ. ST. TUBE A 36			

CONCORDIA UNIVERSITY
MONTREAL

GEARCASE BRACKET

DR BY : P OUELLETTE

81.04.23 | SCALE : $\frac{1}{2}$" = 1" | 1 OF 2

ANNEXE B

ANNEXE B

B.1 Modélisation du carter: inerties et positions correspondantes de l'axe neutre des poutres A et B.

Poutre A

X (po)	EItot = EI + EAd^2 (po^4)	y (po)
.5	25.3 EI + 65.79 t^{2}EA	1.75 t
.75	18.1 EI + 62.30 t^{2}EA	1.65 t
1.5	19.35 EI + 64.89 t^{2}EA	1.57 t
3.0	21.8 EI + 67.39 t^{2}EA	1.45 t
4.5	24.25 EI + 69.39 t^{2}EA	1.36 t
6.0	26.7 EI + 71.02 t^{2}EA	1.28 t
7.5	29.15 EI + 72.38 t^{2}EA	1.21 t
7.5	21.9 EI + 7.37 t^{2}EA	0.45 t
9.0	24.35 EI + 7.38 t^{2}EA	0.46 t

t = .1875 po

Poutre B

X (po)	EItot = EI + EAd^2 (po^4)	y (po)
1.4	17.26 EI + 18.65 t^{2}EA	1.8 t
3.0	22.77 EI + 25.75 t^{2}EA	1.49 t
4.0	26.24 EI + 28.69 t^{2}EA	1.36 t
6.0	33.16 EI + 32.72 t^{2}EA	1.18 t
6.0	25.3 EI + 9.49 t^{2}EA	0.78 t
8.5	33.52 EI + 9.93 t^{2}EA	0.70 t

t = .1875 po

Les autres points de la poutre sont calculés par une interpolation linéaire.

B.2 Calcul de la rigidité équivalente du laminé typique du carter 2.

Les propriétés du laminé sont calculées à partir des données sous forme de graphique fournies par la compagnie "Owens-Corning Fiberglass Co" [15]. Les graphiques donnent les différentes propriétés du tissu mat (450 gr/m^2 - 1 1/2 onz/pi^2) et du tissu stratifil (810 gr/m^2 - 24 onz/ver^2) en fonction du pourcentage en poids de fibre de verre et selon les orientations de la trame et de la chaîne des tissus. Ces propriétés sont le module de Young (E), la limite ultime, l'épaisseur du tissu (t), le poids par surface (W [lb/pi^2]).

Pour des tissus autres que précédemment cités, nous considérerons que E est indépendant du grammage du tissu mais que t et W sont proportionnels au grammage. Ainsi les propriétés des tissus sont:

	tissus mats 1 1/2 onz/pi^2	tissus stratifils 24 onz/ver^2
% en poids de fibre de verre	26 %	40 %
épaisseur t	0.51 po	.053 po
E α = 0° et 90° = E_L, E_T	.7 x 10^6 lb/po^2	1.33 x 10^6 lb/po^2
E α = 45°	.7 x 10^6 lb/po^2	.92 x 10^6 lb/po^2
W	.3615 lb/po^2	.419 lb/po^2
G		G_{LT} = .45 x 10^6

pour le tissu stratifil de 16 oz/ver^2

$$t = .050 \times \frac{16}{24} = .035 \text{ po}$$

$$E_L = E_T = 1.33 \times 10^6 \text{ lb/po}^2$$
$$E_{\alpha = 45°} = .92 \times 10^6 \text{ lb/po}^2$$

$$W = .419 \times \frac{16}{24} = .2795 \text{ lb/pi}^2$$

$$G_{LT} = .45 \times 10^6 \text{ lb/po}^2$$

Pour la poutre B, la trame du tissu stratifil est parallèle à l'axe de la poutre. La rigidité équivalente du laminé typique pour la poutre B est par po de largeur:

$$EI = E[I + Ad^2]$$

$$EI = \left\{ \left[\frac{3}{12} \times \frac{.70}{1.33} \times .051^3 \right] + \left[\frac{2}{12} \times .035^3 \right] + \left(2 \times .035 \times \left[\frac{.051 + .035}{2}\right]^2\right) + \left(2 \times \frac{.70}{1.33} \times .051 \times \left[.051 + .035\right]^2\right) \right\} \times 1.33 \times 10^6$$

$$= 5.51 \times 10^{-4} \text{ po}^4 \text{ /po larg. } \times \text{ } 1.33 \times 10^6 \text{ lb/po}^2$$

$$EA = \left[\left(3 \times \frac{.70 \times .051}{1.33}\right) + (2 \times .035)\right] \times 1.33 \times 10^6 \text{ lb/po}^2$$

Le poids par surface est égal à

$$\frac{W \text{ lb}}{\text{po long. x po larg.}} = \frac{\left([3 \times .3615 \text{ lb/pi}^2] + [2 \times .2795 \text{ lb/pi}^2]\right) \times 1 \text{ pi}^2}{144 \text{ po}^2}$$

$$= 11.41 \times 10^{-3} \text{ lb/po larg. x po long}$$

La trame du tissu stratifil n'est pas parallèle à l'axe de la poutre A, celle-ci fait un angle de 23.6° avec l'axe longitudinal de la poutre. Pour des matériaux orthotropiques, le module de Young, selon cette orientation (E_α) se calcule selon l'équation de transformation des constantes élastiques [2].

$$\frac{E_L}{E\alpha} = \cos^4\alpha + \frac{E_L}{E_T}\sin^4\alpha + \frac{1}{4}\left[\frac{E_L}{G_{LT}} - 2\,\nu_{LT}\sin^2\alpha\right]$$

En utilisant les propriétés suivantes

$E_L = E_T = 1.33 \times 10^6$

$E\alpha = 45° = .92 \times 10^6$

$G_{LT} = .45 \times 10^6$

nous obtenons $E\alpha = 23.6^o = 1.07 \times 10^6$ lb/po^2.

Ainsi la rigidité équivalente en flexion du laminé typique de la poutre est égale à:

$$EI = \left[\left(\frac{3}{12} \times \frac{.70}{1.07} \times .051^3\right) + \left(\frac{2}{12} \times 0.35^3\right) + \left(2 \times .035 \times \left(\frac{.051 + .035}{2}\right)^2\right) + \left(2 \times \frac{.70}{1.07} \times .051 \times [.051 + .035]^2\right)\right] 1.07 \times 10^6 \text{ lb/po}^2$$

$$EI = 6.52 \times 10^{-4} \text{ po}^4\text{/po larg} \times 1.07 \times 10^6 \text{ lb/po}^2$$

$$EA = \left[\left(3 \times \frac{.70}{1.07} \times .051\right) + \left(2 \times .035\right)\right] \times 1.07 \times 10^6 \text{ lb/po}^2$$

$$EA = .17 \text{ po}^2\text{/po larg} \times 1.07 \times 10^6 \text{ lb/po}^2.$$

Les valeurs numériques des masses et des rigidités pour les poutres A et B sont énumérées au tableau suivant:

TABLEAU B.1

masse	x(po)	Poutre A w(lb)	Itot(po^4)	Poutre B w(lb)	I(po^4)
1	.5	.285	.410	.070	.036
2	1.5	.222	.401	.197	.108
3	2.5	.241	.412	.239	.135
4	3.5	.256	.422	.279	.158
5	4.5	.229	.431	.319	.172
6	5.5	.298	.438	.358	.185
7	6.5	.317	.445	.308	.065
8	7.5	.336	.452	.345	.068
9	8.5	.269	.059	.383	.071
10	9.5	.278	.06	.383	.071
11	10.5	.278	.06	.383	.071
12	11.5	.278	.06	----	----

B.3 Calcul des déflexions statiques et de la première fréquence naturelle.

En se servant du théorème de la flèche tangentielle pour une poutre encastrée-libre, la déflexion du point 0 de la poutre se calcule à l'aide de l'équation 12:

vi au point 0 par rapport à l'encastrement M égale:

$$\Delta OM = \overline{x}\int \frac{M}{EI}\,dx$$

Les déplacements (vi) ainsi calculés sont présentés au tableau suivant :

TABLEAU B.2

masse	Poutre A déplacements (po x 10^{-3})	Poutre B déplacements (po x 10^{-3})
1	8.6	4.0
2	7.7	3.5
3	6.8	3.0
4	5.9	2.6
5	5.0	2.1
6	4.1	1.6
7	3.2	1.2
8	2.4	.8
9	1.5	.4
10	.9	.2
11	.3	.02
12	.04	----

En utilisant l'équation 13 et les valeurs des tableaux B.1 et B.2, on calcule la première fréquence naturelle qui est de 41.2 Hz pour la face A et de 64.4 Hz pour la face B.

B.4 Calcul des déformations de la poutre (A et B) du carter No 2

Pour un tissu stratifil orthotropique, sous tension uniaxiale ($\sigma_2 = \tau_{12} = 0$) en utilisant les équations 39 et 41, on obtient

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma_1}{1.07 \times 10^6}$$

$$\varepsilon_2 = -\nu_{12}\,\varepsilon_1 = -.22\,\varepsilon_1 \qquad (39)$$

$$\gamma_{12} = -m_1\,\varepsilon_1\,\frac{E_1}{E_L} = -.11\varepsilon_1$$

$\varepsilon a = .8\varepsilon_1$ (dans la direction de la jauge)

$\varepsilon b = -.01\varepsilon_1$ (dans la direction transversale de la jauge)

De même façon, pour un tissu mat considéré isotropique en considérant les propriétés suivantes du tissu mat:

$Em = .7 \times 10^6$

$\nu m = .40$

on obtient,

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{Em}$$

$$\varepsilon_2 = -.4\varepsilon_1$$

$$\gamma_{12} = 0$$

$$\varepsilon a = .84 - .06 = .78\varepsilon_1$$
$$\varepsilon b = .16 - .34 = -.18\varepsilon_1$$

Si on néglige l'effet du coefficient de poisson entre 2 couches du laminé, on peut approximer la déformation longitudinale de la jauge par $\varepsilon\alpha = .8\varepsilon_1$

Les équations de la courbe des déflexions, obtenues par interpolation polynomiale du tableau B.2 sont:

pour la poutre A

$$v(x10^{-3}\ po) = 9.02665 - 9.44919 \times 10^{-1} \times (po) + 3.00180 \times 10^{-2}\, x^2 - 6.59419 \times 10^{-3}\, x^3 + 5.93545 \times 10^{-4}\, x^4 - 2.17888 \times 10^{-5}\, x^5 + 8.36746 \times 10^{-7}\, x^6$$

et, pour la poutre B

$$v(x10^{-3}\ po) = 4.242 - 4.88163 \times 10^{-1} \times (po) + 5.73165 \times 10^{-3}\, x^2 - 1.35911 \times 10^{-3}\, x^3 + 3.80134 \times 10^{-5}\, x^4 + 1.84931 \times 10^{-5}\, x^5 - 7.29808 \times 10^{-7} x^6$$

On calcule les déformations à la position des jauges (voir paragraphe 5.2.1 et 5.2.2) à l'aide de l'équation 45; on obtient:

poutre A: $\mu\varepsilon_1 = 30$

poutre B: $\mu\varepsilon_1 = 8$

La fraction volumique de la fibre de verre du laminé typique du carter 2 est de 22.5%, soit:

$$Vf = \frac{\left\{ \frac{3 \times .26}{2.54} + \frac{2 \times .40}{1.40gr} \left[\frac{\frac{.035}{.051} \times \left[\frac{.26}{2.54} + \frac{.74}{1.4} \right]}{\left[\frac{.40}{2.54} + \frac{.60}{1.4} \right]} \right] \right\}}{\left[3 + \frac{2 \times .035}{.051} \right] \left[\frac{.26}{2.54} + \frac{.74}{1.40} \right]} = 22.5 \approx 20\% \qquad (34)$$

Donc, pour une fraction volumique approximative de 20% le taux d'amortissement d'une poutre longue à fibres longitudinales est de .004 [11, 12].

Les déformations maximales des jauges de déformations sous une accélération de 1g à une fréquence de résonnance de 45 Hz (poutre A) et 50 Hz (poutre B) sont calculées à l'aide de l'équation 38:

$$\text{poutre A:} \quad \mu\varepsilon max = \frac{.8 \times 30 \times 386.4 \text{ po/sec}^2}{45^2 \times 4\pi^2 \times 2 \times .004 \times .0086 \text{ po}} = 1700$$

$$\text{poutre B:} \quad \mu \text{ max} = \frac{.8 \times 8 \times 386.4 \text{ po/sec}^2}{50^2 \times 4\pi^2 \times 2 \times .004 \times .004 \text{ po}} = 780$$

REFERENCES

1. S.V. Hoa, P. Ouelette, R. Borgiora, "Advanced Concepts for Products Made of Fiber Reinforced Plastics", contrat de recherches CNRC, No 036-1279/0826, Montréal, Jan. 1982.
2. Raymond J. Roark et Warren C. Young, "Formulas for Stress and Strain", McGraw Hill édition, 5^{e}, p. 112.
3. Gibbs & Corp., "Marine Design Manual for Fiber Glass Reinforced Plastics", McGraw-Hill, 1960.
4. J.E. Aston, J.C. Halpin, P.H. Petit, "Premier on Composite Materials Analysis", Technomic Publication, 1969.
5. Albert G.H. DIETZ, "Composites Engineering Laminates", MIT Press, 1969, p. 5.
6. A. ADAMOWICZ, "Guide des matières plastiques en mécanique", Centre technique des industries mécaniques, Sentis, France, 1976, p. D 24.
7. Mabic H. HAMILTON et Fred W. OCVIRK, "Mechanisms and Dynamics of Machinery, John Wiley & Sons, deuxième édition, p. 482.
8. Germain OSTIGUY, "Eléments de vibration", Ecole Polytechnique de Montréal, 1re édition, Jan. 1973.
9. Robert D. ADAMS et D.G. BACON, "The Dynamic Properties of Unidirectional Fibre Reinforced Composites in Flexure and Torsion", J. of Composites Materials, Vol. 3, Jan. 1973, p. 53.
10. Cyril M. HARRIS et Charles E. CREDE, "Shock and Vibration Handbook", McGraw Hill Book Company, 1976, p. 36-12.
11. R.D. ADAMS, M.A.O. FOX, R.J.L. FLOOD, R.J. FRIEND et T.R. HEWIT, "The Dynamic Properties of Unidirectional Carbon and Glass Fiber Reinforced Plastics in Torsion and Flexure", J. of Composites Materials, Vol. 3, Oct. 1969, p. 594.
12. G.C. WRIGHT, "The Dynamic Properties of Glass and Carbon Fibre Reinforced Plastic Beams", Journal of Sound and Vibration, 1972, 21(2), pp. 205-212.
13. Albert SCHULTZ, B.S. TSAI, W. STEPHEN, "Dynamic Moduli and Damping Ratios in Fiber Reinforced Composites", J. Composite Materials, Vol. 2, N° 3, Juillet 1968, p. 368.
14. Albert SCHULTZ, B.S. TSAI, W. STEPHEN, "Measurements of Complex Dynamic Moduli for Laminated Fiber Reinforced Composites", J. Composite Materials, Vol. 3, N° 3, Juillet 1969, p. 434.

15. Gibbs & Cox, "Design Properties of Marine Grade Fiberglass Laminates, Owens/Corning Fiberglas " édition.

NOMENCLATURE

$E_m, E_L = E_T$	module de Young du tissu mat, du tissu stratifié dans la direction de la trame et de la chaine
ν_m, ν_{LT}	coefficient de Poisson du tissu mat, du tissu stratifié
G_m, G_{LT}	module de cisaillement du tissu mat, du tissu stratifié
V_f	fraction volumique de fibre de verre
E_f, Er	module de Young de la fibre de verre(72 GPa), de la résine(3.5 GPa)
ν_f, νr	coefficient de Poisson de la fibre de verre(.2), de la résine(.35)
Eα	module de Young du tissu stratifié dans la direction α
EA, EI	module de rigidité en traction, en flexion
v (x), vi	flèche de la poutre
Δ	flèche tangentielle
$\overline{x}$	distance entre le centroide de ∫M/EI et le point 0
g	accélération gravitationnelle de la terre
Wi	poids de la masse i
z, Z	réponse du système amorti masse-ressort, amplitude
ωf	vitesse angulaire de l'excitation sinusoidale
ωn	vitesse angulaire propre du système amorti masse-ressort
η	taux d'amortissement du système masse-ressort
Y	excitation de la base du système masse-ressort
c	distance entre l'axe neutre et la position de la jauge de déformation
εx	déformation selon l'axe des x
εy	déformation selon l'axe perpendiculaire à l'axe des x
εα	déformation dans l'axe de la jauge de déformation
{M}{K}	vecteur moment, courbure
[D]	matrice relation moment courbure
t_m, t_{LT}	épaisseur des différentes couches des laminés
{W}	vecteur déplacement
[C]	matrice de la fonction déplacement
{a}	vecteur des coefficients de la fonction déplacement
[A]	matrice des noeuds
h,ρ	épaisseur du laminé, densité du laminé

$\{\varepsilon\}, \{\sigma\}$	vecteur déformation, contrainte
$\delta\{q\}\delta\{\varepsilon\}$	vecteur déplacement virtuel, déformation virtuelle
δU, δUe	énergie de déformation virtuelle
δT, δTe	énergie cynétique virtuelle
ω	vitesse angulaire d'un mouvement sinusoidal
$[K]$, $[M]$	matrice de rigidité, de masse